1. Opção **(B)**

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \tan\left(\frac{x}{4}\right) \neq 0 \wedge \frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 4k\pi \wedge x \neq 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Opção **(B)**

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0{,}8 \Leftrightarrow -\cos x = 0{,}8 \Leftrightarrow \cos x = -0{,}8$$

$$\cos x = -0{,}8 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi\right]$$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, a equação não tem soluções.

No intervalo $\left[0, 2\pi\right[$, a equação tem duas soluções.

No intervalo $\left[2\pi, 4\pi\right]$, a equação tem duas soluções.

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi\right]$, a equação tem quatro soluções.

3.1. Seja P o período positivo mínimo da função f .

Por definição, $\forall x \in D_f, f\left(x+P\right) = f\left(x\right)$.

Assim,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x+P\right) = f\left(x\right) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 3\sin\left(\frac{x+P}{5}\right) = 1 - 3\sin\left(\frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 3\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{P}{5}\right) = 1 - 3\sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

Sabendo que 2π é o período positivo mínimo da função seno, conclui-se que $\frac{P}{5} = 2\pi$ e,

portanto, $P = 10\pi$.

3.2. Opção **(A)**

Como $x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{5}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sin\left(\frac{x}{5}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 1 - 3\sin\left(\frac{x}{5}\right) \leq 4$$

Logo, $D'_f = \left[-2, 4\right]$.

3.3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 1-3\sin\left(\frac{x}{5}\right)=1+3\cos\left(\frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{5}\right)=-\cos\left(\frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{5}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{5}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{5}=\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{5}+2k\pi \vee \frac{x}{5}=\pi-\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{4}+5k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in\left[0,\ 5\pi\right[$

Para $k=0$, $x=-\frac{5\pi}{4}\notin\left[0,5\pi\right[$

Para $k=1$, $x=\frac{15\pi}{4}\in\left[0,5\pi\right[$

$B\left(\frac{15\pi}{4},\ g\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right)$

$g\left(\frac{15\pi}{4}\right)=1+3\cos\left(\frac{15\pi}{20}\right)=1+3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1-3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-3\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$

As coordenadas de B são $\left(\frac{15\pi}{4},\ \frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.1. $P(3\cos\alpha,\ 3\sin\alpha)$, $\cos\alpha<0 \wedge \sin\alpha<0$

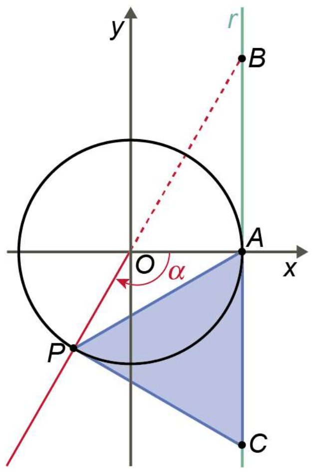
$B(3,\ 3\tan\alpha)$, $\tan\alpha>0$ $\quad C(3,\ -3\tan\alpha)$

A altura do triângulo é dada por $|x_p|+3$.

$A=\frac{|y_C|\times(3+|x_P|)}{2}=\frac{|-3\tan\alpha|\times(3+|3\cos\alpha|)}{2}=$

$=\frac{3\tan\alpha\times(3-3\cos\alpha)}{2}=\frac{9\tan\alpha-9\cos(\alpha)\tan\alpha}{2}=$

$=\frac{9}{2}(\tan\alpha-\sin\alpha)=A(\alpha)$



4.2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1-3\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \Leftrightarrow \cos\alpha=1+3\cos\alpha \Leftrightarrow -2\cos\alpha=1 \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2}$

Como $\cos\alpha=-\frac{1}{2} \wedge \alpha\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$, então $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$ e $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\alpha=\sqrt{3}$

Logo, $A(\alpha)=\frac{9}{2}\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

4.3. A solução do problema é o valor de $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ que é solução da equação:

$$A(\alpha) = 3\pi \Leftrightarrow \frac{9}{2}(\tan\alpha - \sin\alpha) = 3\pi$$

$\alpha \approx -2{,}23$ rad

5. Opção **(D)**

Se $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 0$

Daqui resulta $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \cos x + \sin x < 1 + 0$, ou seja, $0 < \cos x + \sin x < 1$

6. $\alpha \in \left]-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$, então $-1 \leq \sin\alpha \leq \frac{1}{2}$

$$-1 \leq \frac{3k-1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3k-1}{2} \geq -1 \wedge \frac{3k-1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{3} \wedge k \leq \frac{2}{3}$$

Logo, $k \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

7. Opção **(A)**

$\sqrt{11}x - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{11}}{5}x + \frac{2}{5}$. Como r tem declive positivo, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{11}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{36}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{36}$$

Como, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Daqui resulta que $\sin\alpha = \tan(\alpha)\cos\alpha$, ou seja, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

8. Opção **(C)**

$$\tan\alpha = m \Leftrightarrow \tan\alpha = -\frac{2}{3}$$

Se o declive é negativo, então a inclinação $90º < \alpha < 180º$

A opção que satisfaz é: **(C)** $146{,}31º$

9. $A(0, b)$, $B(a, 0)$

$\alpha = 150º$

$$m = \tan(150º) = -\tan(30º) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}a + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Logo, $A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$.

$$\overrightarrow{AO} = O - A = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) \text{ e } \overrightarrow{AB} = B - A = (a, 0) - \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right) = \left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) \cdot \left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) = 0 + \frac{3}{9}a^2 = \frac{a^2}{3}$$