

1. Opção (D)

$$f(x) = \frac{3x}{x+2} = 3 - \frac{6}{x+2}$$

Equações das assíntotas do gráfico de f :

Equação da assíntota vertical: $x = -2$

Equação da assíntota horizontal: $y = 3$

Equações das assíntotas ao gráfico de g :

Equação da assíntota vertical: $x = -2 - a$

Equação da assíntota horizontal: $y = -3 + b$

$$-2 - a = -3 \Leftrightarrow -a = -1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$-3 + b = 4 \Leftrightarrow b = 7$$

2.1. Assíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 3x - 8}{x + 3} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntota oblíqua:

$$y = mx + b$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 8}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 8 - x^2 - 3x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{x + 3} = 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

O ponto de interseção das assíntotas de equações $x = -3$ e $y = x$ é $I(-3, -3)$.

3.1. $\lim(u_n) = \lim\left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4^+$

Logo, $\lim g(u_n) = 5$.

3.2. $\lim(v_n) = \lim\left(\frac{4n+5}{n+2}\right) = \lim\left(4 - \frac{3}{n+2}\right) = 4^-$

Logo, $\lim g(v_n) = +\infty$.

3.3. $\lim(w_n) = \lim\left(\frac{n^2}{1-4n}\right) = \lim\left(\frac{n^2}{n\left(\frac{1}{n}-4\right)}\right) = \lim\left(\frac{n}{\frac{1}{n}-4}\right) = -\infty$

Logo, $\lim g(w_n) = -2$.

$$4. \quad \sqrt{4-3x} = 0 \Rightarrow 4-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$B\left(\frac{4}{3}, 0\right); A\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\overline{AB} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$C(x, \sqrt{4-3x})$$

$$A_{[ABC]} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{8}{3} \times \sqrt{4-3x}}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{3} \sqrt{4-3x} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-3x} = 4 \Rightarrow 4-3x = 16 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{Verificação: } x = -4: A_{[ABC]} = \frac{\frac{8}{3} \times \sqrt{4-3 \times (-4)}}{2} = \frac{\frac{8}{3} \times 4}{2} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

Então, $C(-4, \sqrt{4-3 \times (-4)})$, ou seja, $C(-4, 4)$.

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+6-9}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{9\sqrt{19-x}} = \frac{1}{36} = g(3)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = g(3) = \frac{1}{36}$, resulta que existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ e é igual a $\frac{1}{36}$.

Atendendo a que $3 \in D_g$ e existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, concluiu-se que g é contínua em $x = 3$.

6. Opção (A)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = f'(2\pi) = m_s$$

A reta s , sendo perpendicular à reta de equação $y = -3x + 2$, tem declive $\frac{1}{3}$.

$$\text{Então: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi+h) - f(2\pi)}{h} = \frac{1}{3}$$

$$7.1. \quad g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2 - 0}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{x - 1} = -3$$

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	0

Sendo $y = mx + b$ a equação reduzida da reta s , tem-se $m = -3$.

Como $B \in s$: $0 = -3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 3$

Então, a equação reduzida da reta s é $y = -3x + 3$.

7.2. Seja $C(0, 7)$.

$\overline{AC} = C - A = (1, 9)$. Então, o declive da reta r é 9, ou seja, $g'(-1) = 9$.

Deste modo, $\tan \alpha = 9$, ou seja, $\alpha \approx 84^\circ$.

8. Se $a = 7$, então o ponto A tem coordenadas $(7, f(7))$, ou seja, $(7, 3)$.

O declive da reta r é igual a $f'(7) = \frac{1}{6}$.

Uma equação da reta r é do tipo $y = \frac{1}{6}x + b$.

Atendendo a que o ponto A pertence à reta r , tem-se: $3 = \frac{7}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{6}$

A reta r é definida por $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$.

Assim, o ponto B tem coordenadas $(0, \frac{11}{6})$.

A área do triângulo $[OAB]$ é dada por $\frac{\overline{OB} \times h}{2}$, sendo h a altura do triângulo em relação ao lado $[OB]$.

$$\frac{\overline{OB} \times h}{2} = \frac{\frac{11}{6} \times 7}{2} = \frac{77}{12}$$

Conclui-se que $g(7) = \frac{77}{12}$.

9. Opção (B)

Observa-se que $r_1 < 0$. Relativamente às nuvens de pontos II e III, os dados estão mais dispersos e afastados da respetiva reta em II do que em III.

Assim, conclui-se que $r_3 > r_2 > r_1$.

10.1. $\bar{x} \approx 1685,56$ e $s \approx 56,01$.

$$]\bar{x} - s, \bar{x} + s[=]1629,55; 1741,57[$$

O número de empregados no Norte não pertenceu ao intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$ nos anos 2017, 2023 e 2024 .

10.2. a) Como $r \approx 0,98$; existe uma correlação positiva e forte entre as duas variáveis.

b) $a \approx 3,239$ e $b \approx -611,445$

Equação da reta de regressão: $y = 3,239x - 611,445$

Assim, tem-se: $4429,9 = 3,239x - 611,445 \Leftrightarrow x \approx 1556,5$

Estima-se que o número de empregados no Norte de Portugal, em 2016, foi 1556,5 milhares.