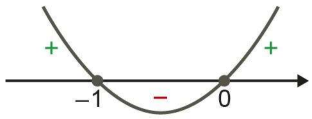
1. Opção **(B)**

$A_{\text{base}} = 16\pi \Leftrightarrow \pi \times r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r = 4, r > 0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\hat{,}\overrightarrow{AD}\right) = 8 \times 12 \times \cos\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -48$

2. Opção **(D)**



$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow (2,k) \cdot (k, k-1) < 0 \Leftrightarrow 2k + k^2 - k < 0 \Leftrightarrow k^2 + k < 0$

$k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k(k+1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -1$

O ângulo é obtuso quando $k \in \left]-1, 0\right[$.

3.1. O vetor $\vec{t}(1, -5)$ é um vetor diretor da reta t.

Seja $T(x, y)$. Sabe-se que $T \in t$ e $\overrightarrow{CT} \cdot \vec{t} = 0$

$\begin{cases} y = -5x + 6 \\ (x+4, y) \cdot (1, -5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x + 4 - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x + 4 - 5(-5x + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x + 4 + 25x - 30 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 26x = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\therefore T(1, 1)$

3.2. $m_{CT} = -\dfrac{1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

$CT : y = \dfrac{1}{5}x + b$, então $0 = -\dfrac{4}{5} + b \Leftrightarrow b = \dfrac{4}{5}$.

Logo, $CT : y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{4}{5}$.

3.3. $\overrightarrow{TC} = C - T = (-4, 0) - (1, 1) = (-5, -1)$

A reta t' é paralela à reta t e é tangente à circunferência num ponto. Designemos esse ponto por P.

Ora, $P = C + \overrightarrow{TC} = (-4, 0) + (-5, -1) = (-9, -1)$.

A reta t' tem declive -5, pois é paralela à reta t e um vetor diretor da reta t' é, por exemplo, $\vec{v}(1, -5)$.

Assim, uma equação vetorial da reta t' é $(x, y) = (-9, -1) + k(1, -5), k \in \mathbb{R}$.

3.4. O raio da circunferência é $r = \overline{CT} = \sqrt{(-4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{26}$

A circunferência representada na figura é definida pela condição $(x+4)^2 + y^2 = 26$

O conjunto dos pontos do 1.º quadrante que pertencem à região limitada pela circunferência e pela reta t, incluindo a fronteira, é: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge (x+4)^2 + y^2 \geq 26 \wedge y \leq -5x + 6$

4.1. $\tan\alpha = m_{AB} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$

$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

Como α é a inclinação da reta AB e $\tan\alpha < 0$, conclui-se que $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

Então, $\sin\alpha - 3\cos\alpha = \frac{3}{5} - 3\times\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}+\frac{12}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

4.2. Vetor diretor de AB: por exemplo, $\vec{r}(4,-3)$

Vetor diretor de s: por exemplo, $\vec{s}(-1, 2)$

$\cos\left(\widehat{AB, s}\right) = \frac{|(4,-3)\cdot(-1,2)|}{\sqrt{16+9}\times\sqrt{1+4}} = \frac{|-4-6|}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Recorrendo à calculadora obtém-se $\left(\widehat{AB, s}\right) \approx 26{,}6^\circ$.

5. Opção **(A)**

Vetores normais aos planos: $\overrightarrow{n_1}(2,-1,3)$ e $\overrightarrow{n_2}(-2,k,-k-2)$.

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow (2,-1,3)\cdot(-2,k,-k-2) = 0 \Leftrightarrow -4-k-3k-6=0 \Leftrightarrow -4k=10 \Leftrightarrow k=-\frac{5}{2}$

6. Opção **(D)**

Se P é equidistante de A e de B, então pertence a β. Das opções dadas, apenas o ponto $(-2, 0, 2)$ satisfaz a equação do plano β.

7. Opção **(A)**

A superfície esférica tem centro $C(0, 0, -1)$ e raio 4.

Os planos definidos por equações do tipo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, são tangentes à superfície esférica se $|k-(-1)| = 4$.

$|k-(-1)| = 4 \Leftrightarrow |k+1| = 4 \Leftrightarrow k+1=4 \vee k+1=-4 \Leftrightarrow k=3 \vee k=-5$

8.1. O vetor $\vec{u}(4, 2, -4)$ é normal ao plano α .

Designemos por C o centro da base do cone.

Como o cone é reto, sabe-se que a reta VC é perpendicular ao plano α .

Então, o vetor $\vec{u}(4, 2, -4)$ é um vetor diretor da reta VC .

A reta VC pode ser definida pela equação vetorial:

$(x, y, z) = (-2, 1, 4) + k(4, 2, -4),\ k \in \mathbb{R}$

As coordenadas de qualquer ponto da reta VC são do tipo $(-2+4k, 1+2k, 4-4k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Em particular, sabe-se que $C(-2+4k, 1+2k, 4-4k)$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

Como C pertence ao plano α , tem-se:

$4(-2+4k)+2(1+2k)-4(4-4k)-14=0 \Leftrightarrow -8+16k+2+4k-16+16k-14=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36k-36=0 \Leftrightarrow k=1$

Substituindo k por 1, conclui-se que $C(2, 3, 0)$.

8.2. $\vec{n}(4, 2, -4)$ e $V(-2, 1, 4)$

$4x+2y-4z+d=0$, substituindo pelas coordenadas de V:

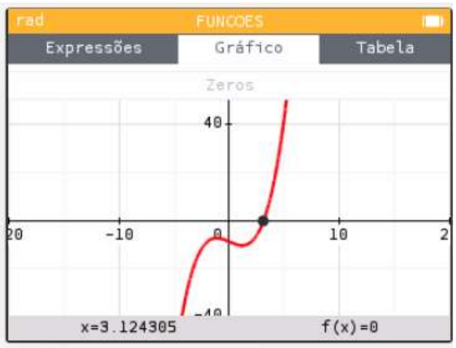
$-8+2-16+d=0 \Leftrightarrow d=22$

O plano β pode ser definido pela equação $4x+2y-4z+22=0$.

8.3. $Q\left(x, 0, \dfrac{x^3}{8}\right)$

$\overrightarrow{OV}=(-2, 1, 4)$ e $\overrightarrow{PQ}=\left(x-1, -7, \dfrac{x^3}{8}-1\right)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OV}=0 \Leftrightarrow \left(x-1, -7, \dfrac{x^3}{8}-1\right)\cdot(-2, 1, 4)=0 \Leftrightarrow -2x+2-7+\dfrac{x^3}{2}-4=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{2}-2x-9=0$



$x_Q \approx 3{,}12$

9. $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=\dfrac{1}{5}a\times\dfrac{4}{5}a\times\cos(180°)+0+0+a\times a\times\cos(0°)=-\dfrac{4}{25}a^2+a^2=\dfrac{21}{25}a^2$