1. Opção **(D)**

Se $n \leq 10$, $u_n = n^2$. Então, tem-se: $1 \leq n^2 \leq 100$

Se $n > 10$, $u_n = \frac{4n}{n+1}$

Repara que: $\frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}$ (todos os termos são menores do que 4 e é crescente),

tem-se: $u_{11} \leq \frac{4n}{n+1} < 4$, ou seja, $\frac{11}{3} \leq \frac{4n}{n+1} < 4$

Conclui-se que $\frac{11}{3} \leq u_n \leq 100$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (sucessão limitada)

2. Opção **(D)**

$u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n = 0 \Leftrightarrow n(n-4) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 4 \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 4$

Então, sabe-se que $u_{4+1} - u_4 = 0 \Leftrightarrow u_5 = u_4$

3.

3.1. $u_n = \frac{9}{7} \Leftrightarrow \frac{2n-3}{n+6} = \frac{9}{7} \Leftrightarrow 14n - 21 = 9n + 54 \Leftrightarrow 5n = 75 \Leftrightarrow n = 15$

Logo, $\frac{9}{7}$ é o termo de ordem 15 da sucessão (u_n).

3.2. $u_n > 1{,}7 \Leftrightarrow \frac{2n-3}{n+6} > 1{,}7 \Leftrightarrow 2n - 3 > 1{,}7n + 10{,}2 \Leftrightarrow n > 44$

O termo de menor de ordem que é maior do que 1,7 é: $u_{45} = \frac{2 \times 45 - 3}{45 + 6} = \frac{29}{17}$

3.3. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{n+1+6} - \frac{2n-3}{n+6} = \frac{(2n-1)(n+6)-(2n-3)(n+7)}{(n+7)(n+6)} =$

$= \frac{2n^2 + 12n - n - 6 - 2n^2 - 14n + 3n + 21}{(n+7)(n+6)} = \frac{15}{(n+7)(n+6)}$

O denominador é positivo, qualquer que seja o valor de n, e o numerador também é positivo.

Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. A sucessão (u_n) é monótona crescente.

3.4. Como a sucessão (u_n) é monótona crescente, sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_1$

Ora, $u_1 = \frac{2 \times 1 - 3}{1+6} = -\frac{1}{7}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & n+6 \\ \hline -2n-12 & 2 \\ -15 & \end{array}$$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - \dfrac{15}{n+6}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{15}{n+6} \leq \frac{15}{7}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 > -\frac{15}{n+6} \geq -\frac{15}{7}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 2 > 2-\frac{15}{n+6} \geq -\frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{7} \leq 2-\frac{15}{n+6} < 2$$

Assim sendo, a sucessão (u_n) é limitada.

4.

4.1. Seja r a razão da progressão aritmética (v_n).

$$v_6 = v_1 + (6-1)r \Leftrightarrow 28 = v_1 + 5r \Leftrightarrow v_1 = 28 - 5r$$

$$S_{15} = 570 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{15}}{2} \times 15 = 570 \Leftrightarrow v_1 + v_1 + 14r = 76 \Leftrightarrow 2v_1 + 14r = 76 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(28-5r) + 14r = 76 \Leftrightarrow 56 - 10r + 14r = 76 \Leftrightarrow 4r = 20 \Leftrightarrow r = 5$$

Então, tem-se:

$$v_n = v_6 + (n-6)r \Leftrightarrow v_n = 28 + 5n - 30 \Leftrightarrow v_n = 5n - 2$$

4.2. $v_n > 150 \wedge v_n < 400 \Leftrightarrow 5n-2 > 150 \wedge 5n-2 < 400 \Leftrightarrow n > 30{,}4 \wedge n < 80{,}4$

A sucessão tem 50 termos superiores a 150 e inferiores a 400. A soma desses termos é:

$$S = \frac{v_{31}+v_{80}}{2} \times 50 = \frac{153+398}{2} \times 50 = 13\,775$$

5. Opção **(B)**

$$u_{12} = 2u_{11} - 1 \Leftrightarrow 845 = 2u_{11} - 1 \Leftrightarrow u_{11} = 423$$

$$u_{11} = 2u_{10} - 1 \Leftrightarrow 423 = 2u_{10} - 1 \Leftrightarrow u_{10} = 212$$

6.

6.1. $v_{n+1} = v_n + v_n \times 0{,}18 = (1+0{,}18)v_n = 1{,}18v_n$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1{,}18$ Logo, conclui-se que a razão é $1{,}18$

$v_1 = 475$ Logo, o termo geral é $v_n = 475 \times 1{,}18^{n-1}$

6.2. Pretende-se determinar o valor pago pelo automóvel, ou seja, a soma das 13 prestações.

$S_{13} = v_1 \times \frac{1-r^{13}}{1-r} = 475 \times \frac{1-1{,}18^{13}}{1-1{,}18}$, ou seja, $S_{13} \approx 20\,053{,}86$

A Sónia pagou $20\,053{,}86$ € pelo automóvel

7.

$$\lim \frac{\sqrt{3+n^2}+n}{5n+1} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{3}{n^2}+1\right)}+n}{5n+1} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{\frac{3}{n^2}+1}+n}{5n+1} = \lim \frac{n\left(\sqrt{\frac{3}{n^2}+1}+1\right)}{n\left(5+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{\frac{3}{n^2}+1}+1}{5+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{0+1}+1}{5+0} = \frac{2}{5}$$

8. Opção **(A)**

$$\lim(u_n) = \lim \frac{-1+2n}{2n} = \lim\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 1^-$$

$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$, então $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

A reta de equação $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de f ,

$$\lim f(u_n) = \lim \frac{2u_n-3}{u_n-1} = \frac{-1}{0^-} \to +\infty$$

9.

9.1. $f(x) = \frac{4x-9}{x-3} = 4 + \frac{3}{x-3}$

$$\begin{array}{r|l} 4x - 9 & x-3 \\ \hline \underline{-4x+12} & 4 \\ 3 & \end{array}$$

Então, tem-se:

$r:\ x=3 \to$ assíntota vertical do gráfico de f

$s:\ y=4 \to$ assíntota horizontal do gráfico de f

Assim, $T(3, 4)$.

9.2. $f(x) \geq \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-3} \geq \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \frac{4x-9}{x-3} - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x-18-x^2+3x}{2(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+11x-18}{2(x-3)} \geq 0$

Zeros:

$$-x^2+11x-18=0 \wedge 2(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4\times(-1)\times(-18)}}{2\times(-1)} \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow (x=9 \vee x=2) \wedge x \neq 3$$

x	$-\infty$	2		3		9	$+\infty$
$-x^2+11x-18$	–	0	+	+	+	0	–
$2(x-3)$	–	–	–	0	+	+	+
$\frac{-x^2+11x-18}{2(x-3)}$	+	0	–	n.d.	+	0	–

$f(x) \geq \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2\right] \cup \left]3, 9\right]$

9.3.1. $C(x, f(x))$; $D(0, y_C)$; $A(0, f(0))$

$f(0) = \frac{4\times 0 - 9}{0-3} = 3$. Então, $A(0,3)$

$B(3,3)$ uma vez que a reta de equação $x=3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assim: $\overline{AB} = 3$; $\overline{DC} = x$;

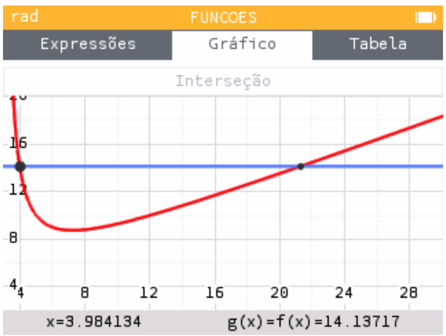
$$\overline{DA} = \overline{OD} - \overline{OA} = f(x) - 3 = \frac{4x-9}{x-3} - 3 = \frac{x}{x-3}$$

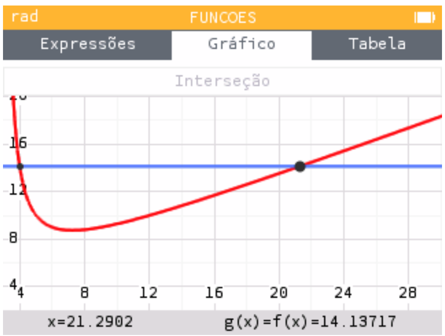
$$A(x) = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{DA} = \frac{x+3}{2} \times \frac{x}{x-3} = \frac{x^2+3x}{2x-6}$$

9.3.2. $\overline{AB} = 3$; $r = \frac{3}{2}$; $A_{\text{círculo}} = \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi$; $2A_{\text{círculo}} = \frac{9}{2}\pi$

$$A(x) < \frac{9}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{x^2+3x}{2x-6} < \frac{9}{2}\pi$$

$$y_1 = \frac{x^2+3x}{2x-6}; \quad y_2 = \frac{9}{2}\pi$$





Assim, $x \in \left]3{,}98; 21{,}29\right[$

10. Opção **(D)**

Declive da reta r : $m_r = \dfrac{-2-2}{0-(-4)} = -1$

Equação reduzida da reta r : $y = -x - 2$

Como o domínio da função f é $\mathbb{R}^-$ e a reta r é assíntota ao gráfico de f .

Sabe-se que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m_r = -1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x + 2\right) = 0$

Conclui-se que: $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$