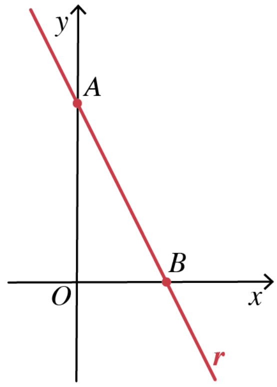
Proposta de resolução do teste de avaliação [março – 2023]

1. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxy, uma reta r.



Sabe-se que:

- o declive da reta r é -2;
- a reta r interseta o eixo Oy no ponto A;
- a reta r interseta o eixo Ox no ponto B.

Qual é o valor de $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$?

(A) -2 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $2{,}1$ **(D)** 2

Seja θ a inclinação da reta r.

Sabe-se que $\tan\theta = -2$.

$A\hat{B}O = \pi - \theta$. Então, $\tan\left(A\hat{B}O\right) = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = 2$.

Mas, $\tan\left(A\hat{B}O\right) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$. Conclui-se que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = 2$.

Opção correta: (D) 2

2. Sejam r e s duas retas tais que:

- a reta r é definida pela equação vetorial $(x, y) = \left(-\sqrt{3}, 2\right) + k(3, -2)$, $k \in \mathbb{R}$;
- a reta s tem inclinação, representada por θ, e é perpendicular à reta r.

Calcula o valor exato de $\sin\theta$.

O declive da reta r é igual $-\frac{2}{3}$.

Como a reta s é perpendicular à reta r, conclui-se que o declive de s é $\frac{3}{2}$.

$\tan\theta = \frac{3}{2} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabe-se que $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.

Então, $1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$. Daqui resulta que $\cos^2(\theta) = \frac{4}{13}$.

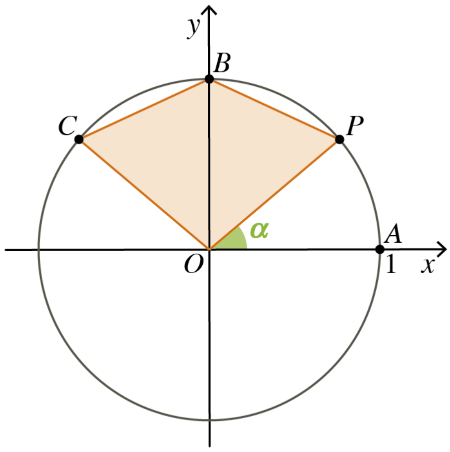
$\sin^2(\theta) = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \wedge \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Daqui resulta que $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Resposta: $\sin\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

3. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um quadrilátero [*OPBC*], que é simétrico em relação ao eixo *Oy*.

Sabe-se que:

- o ponto *P* desloca-se sobre o arco *AB* da circunferência;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo *AOP*.



Para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do quadrilátero [*OPBC*] é dada pela expressão:

(A) $\cos\alpha$ **(B)** $1-\sin\alpha$

(C) $\sin\alpha$ **(D)** $2\sin\alpha\cos\alpha$

A área do triângulo [*OPB*] é dada por: $\frac{\overline{OB}\times\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{2}$

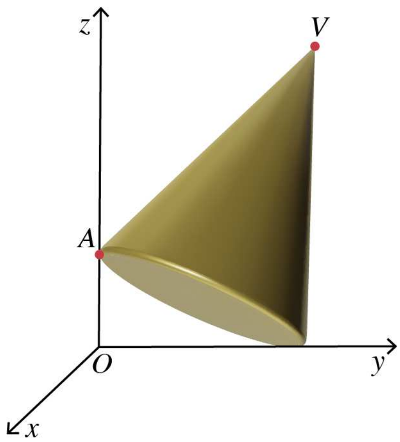
Área do quadrilátero [*OPBC*] é igual a: $2\times\frac{\cos\alpha}{2}$, ou seja, $\cos\alpha$.

Opção correta: (A) $\cos\alpha$

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice *V*.

Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano definido pela equação $4x-y-2z+4=0$;
- o ponto *A* pertence à circunferência que limita a base do cone e pertence ao eixo *Oz*;
- o vértice *V* tem coordenadas $(-8,4,5)$.



4.1 Determina $\overline{AV}$.

O ponto *A* coincide com a interseção do plano da base do cone com o eixo *Oz*.
As coordenadas do ponto *A* são do tipo $(0,0,z)$.

O ponto *A* pertence ao plano $4x-y-2z+4=0$.

$0-0-2z+4=0 \Leftrightarrow z=2$. Assim, conclui-se que o ponto *A* tem coordenadas $(0,0,2)$.

$\overline{AV}=\sqrt{(-8-0)^2+(4-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{89}$

Resposta: $\overline{AV}=\sqrt{89}$

4.2 Seja C o centro da base do cone. Determina as coordenadas do ponto C.

Uma equação vetorial da reta que passa em V e é perpendicular à base do cone é:

$(x,y,z)=(-8,4,5)+k(4,-1,-2)$, $k \in \mathbb{R}$

O ponto C pertence à reta, então as coordenadas de C são do tipo:

$(-8+4k,\ 4-k,\ 5-2k),$, $k \in \mathbb{R}$

Mas, o ponto C também pertence ao plano $4x-y-2z+4=0$ que contém a base do cone.

Então:

$4(-8+4k)-(4-k)-2(5-2k)+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(-8+4k)-(4-k)-2(5-2k)+4=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow k=2$

Sendo $C(-8+4k,\ 4-k,\ 5-2k)\ \wedge\ k=2$.

Assim, $C(0,2,1)$.

Resposta: As coordenadas do ponto C são $(0,2,1)$.

5. Seja (v_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} 7n-1 & \text{se } n \leq 8 \\ \dfrac{5}{n} & \text{se } n > 8 \end{cases}$$, para todo o número n inteiro positivo

Indica a firmação verdadeira

(A) A sucessão (v_n) é monótona.

(B) A sucessão (v_n) é limitada.

(C) Todos os termos da sucessão (v_n) são maiores do que 1.

(D) 62 é termo da sucessão (v_n).

Se $n \leq 8$, os termos formam uma sequência crescente, tendo-se: $6 \leq v_n \leq 55$

Se $n > 8$, $v_n = \dfrac{5}{n}$, sucessão decrescente, tendo-se: $0 < v_n \leq \dfrac{5}{9}$

Para qualquer número inteiro positivo n, tem-se: $0 < v_n \leq 55$. Conclui-se que (v_n) é limitada.

Opção correta: (B) A sucessão (v_n) é limitada.

6. Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência, por

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$, para todo o número n inteiro positivo.

Sabendo que $u_{15} = 32\,771$, qual é o valor de $u_{16} - u_{14}$?

(A) 24582 **(B)** 49 152 **(C)** 32768 **(D)** 49 158

$u_{15} = 2u_{14} - 3 \Leftrightarrow 32\ 771 = 2u_{14} - 3 \Leftrightarrow u_{14} = 16\ 387$

$u_{16} = 2u_{15} - 3 \Leftrightarrow u_{16} = 2 \times 32771 - 3 \Leftrightarrow u_{16} = 65539$

$u_{16} - u_{14} = 65\ 539 - 16\ 387 = 49\ 152$

Opção correta: (B) 49 152

7. Considera a sucessão (w_n) definida por:

$$\begin{cases} w_1 = -3 \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$, para todo o número n inteiro positivo.

Determina o número de termos da sucessão (w_n) que são maiores do que 12 e não superiores a 25.

A sucessão (w_n) é uma progressão aritmética em que o primeiro termo é -3 e a razão é $\frac{1}{2}$.

Termo geral:

$$w_n = w_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n-7}{2}$$

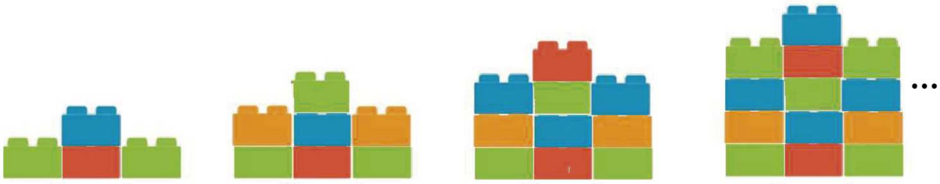
$$w_n > 12 \wedge w_n \leq 25 \Leftrightarrow \frac{n-7}{2} > 12 \wedge \frac{n-7}{2} \leq 25 \Leftrightarrow n > 31 \wedge n \leq 57$$

O primeiro termo a satisfazer a condição é o de ordem 32 e o último é o de ordem 57.

O número de termos que satisfaz a condição é dado por: $57 - 32 + 1$, ou seja, 26.

Resposta: Há 26 termos maiores do que 12 e não superiores a 25.

8. O Bernardo tem disponíveis 960 peças. Com essas peças vai construir uma sequência de "torres". As quatro primeiras "torres" da sequência estão representadas a seguir, mantendo a mesma lei de formação para as restantes "torres".



Nestas condições, determina o número máximo de "torres" que o Bernardo pode construir.

Seja (t_n) a sucessão que à figura de ordem n associa o número de peças de lego dessa figura.

A primeira figura tem 4 peças e o número de peças de cada uma das restantes é igual ao número de peças da figura anterior acrescida de 3 peças.

Assim: $\begin{cases} t_1 = 4 \\ t_{n+1} = t_n + 3 \end{cases}$

Termo geral: $t_n = 4 + (n-1) \times 3 = 3n + 1$

A soma dos n primeiros termos da sucessão é:

$$S_n = \frac{t_1 + t_n}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{4 + 3n + 1}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$$

Qual é o valor de n para gastar todas as peças disponíveis?

$$S_n = 960 \Leftrightarrow \frac{3n^2 + 5n}{2} = 960 \Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 1920 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 23\,040}}{6} \Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{23\,065}}{6}$$

Para soluções da equação: $n \approx 24,48$ ou $n \approx -26,15$.

Analisando estes valores, no contexto apresentado, conclui-se que podem ser construídas no máximo 24 "torres".

Resposta: O Bernardo, no máximo, pode construir 24 "torres".

Nota/sugestão: Explorar a resolução, recorrendo à calculadora para resolver graficamente a inequação $f(x) \leq 960$, sendo $f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{2}$.

9. Seja (u_n) uma sucessão de termo geral $u_n = \frac{3^{2n}}{2^n}$.

Mostra que (u_n) é uma progressão geométrica em que a razão é igual ao primeiro termo.

Repara que: $u_n = \frac{3^{2n}}{2^n} = \frac{\left(3^2\right)^n}{2^n} = \frac{9^n}{2^n} = \left(\frac{9}{2}\right)^n$. Daqui resulta que $u_1 = \frac{9}{2}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{2}\right)^n} = \frac{9}{2}$. Conclui-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{9}{2}$.

Resposta: (u_n) é uma progressão geométrica em que o primeiro é igual à razão, neste caso, $\frac{9}{2}$.

10. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

$$u_n = \frac{1-n^2}{n+1} \qquad w_n = \begin{cases} 5n & \text{se } n < 100 \\ \frac{3}{n+1} & \text{se } n \geq 100 \end{cases}$$

10.1 Mostra que $u_n = 1-n$. O que concluis quanto $\lim(u_n)$?

Repara que $u_n = \frac{1-n^2}{n+1} = \frac{(1-n)(1+n)}{n+1} = 1-n$

$\lim(u_n) = \lim(1-n) = -\infty$

Resposta: $u_n = 1-n$ e $\lim(u_n) = -\infty$

10.2 Em relação à sucessão (v_n), indica o maior termo e o valor de $\lim(v_n)$.

Para os termos em que $n < 100$ são crescentes, o maior é $u_{99} = 5 \times 99 = 495$.

Para os termos em que $n \geq 100$ são decrescentes, o maior é $u_{100} = \frac{3}{101}$.

Então, conclui-se que o maior termo da sucessão é $u_{99} = 495$.

$\lim(v_n) = \lim \frac{3}{n+1} = 0$

Resposta: O maior termo é 495 e $\lim(v_n) = 0$.