1.

1.1. $B\hat{A}F = 120^\circ$

O declive da reta AF é igual a $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

A equação da reta AF é do tipo $y = -\sqrt{3}\,x + b$ e passa no posso $F(0, b)$.

$\sin 60^\circ = \frac{\overline{OF}}{\overline{AF}} = \frac{b}{2}$. Daqui resulta que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2}$, ou seja, $b = \sqrt{3}$.

Resposta: $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

1.2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Resposta: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -2$

2.

2.1. Equação da superfície esférica que limita a esfera: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 18$

Condição que define a aresta $[AE]$: $x = 4 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq z \leq 4$

$4^2 + 0^2 + (z-2)^2 = 18 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 2 \Leftrightarrow z = 2 - \sqrt{2} \vee z = 2 + \sqrt{2}$

O segmento de reta que resulta da interseção da esfera com a aresta [AE] é o segmento de reta de extremos nos pontos $P_1\left(4, 0, 2-\sqrt{2}\right)$ e $P_2\left(4, 0, 2+\sqrt{2}\right)$.

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4-4)^2 + (0-0)^2 + \left(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Resposta: Opção **(C)** $2\sqrt{2}$

2.2. $r: (x, y) = H + k\overrightarrow{BD}, \quad k \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{BD} = D - B = (0, 0, 4) - (4, -4, 0) = (-4, 4, 4)$

$r: (x, y) = (4, -4, 3) + k(-4, 4, 4), \quad k \in \mathbb{R}$

O ponto T é do tipo $(4-4k, -4+4k, 3+4k)$, $k \in \mathbb{R}$

A face [$EDGF$] é definida por: $z = 4 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 0$

Sendo $z=4$, tem-se $3+4k=4$, ou seja, $k=\frac{1}{4}$.

Assim, $T(4-4k,-4+4k,3+4k)=(3,-3,4)$.

Resposta: $T(3,-3,4)$

2.3. $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ representa o plano perpendicular a *OH* no ponto *H*.

Seja $P(x,\ y,\ z)$.

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OH}=0 \Leftrightarrow (4-x,-4-y,3-z).(4,-4,3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16-4x+16+4y+9-3z=0 \Leftrightarrow -4x+4y-3z+41=0$

Resposta: Plano perpendicular a *OH* em *H* definido pela equação $-4x+4y-3z+41=0$.

2.4. $\cos\left(O\hat{H}C\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HC}}\right)=\frac{\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|}=\frac{(-4,4,-3)\cdot(-4,0,-3)}{\sqrt{41}\times\sqrt{25}}=$

$=\frac{25}{5\sqrt{41}}=\frac{5}{\sqrt{41}}$

Recorrendo à calculadora, obtém-se: $\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)\approx 0{,}675$

Resposta: Opção **(C)** $0{,}675$

3. Volume da pirâmide:

$\frac{1}{3}\times 36\times\overline{V'V}=24\sqrt{6}$. Daqui resulta que $\overline{V'V}=2\sqrt{6}$.

Equação da reta $V'V$: $(x,y,z)=(1,-2,-1)+k(1,-1,2)$, $k\in\mathbb{R}$

Coordenadas do ponto *V*: $V(1+k,-2-k,-1+2k)$

$\overline{V'V}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(1+k-1)^2+(-2-k+2)^2+(-1+2k+1)^2}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2+k^2+4k^2}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow 6k^2=24 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=2$

. Se $k=-2$, então $V(-1,0,-5)$ (a soma das coordenadas é negativa).

. Se $k=2$, então $V(3,-4,5)$ (a soma das coordenadas é positiva).

Resposta: $V(-1,0,-5)$

4.

4.1. $w_1 = k$ e $w_2 = w_1 + k^2 = k + k^2$

$$w_2 = 6 \Leftrightarrow k + k^2 = 6 \Leftrightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow k = -3 \ \vee \ k = 2$$

Como os termos são positivos, o valor de k é 2.

Resposta: Opção (**D**) 2

4.2 $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} = w_n + \frac{1}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Progressão aritmética em que o 1.º termo é } \frac{1}{2} \text{ e a razão é } \frac{1}{4}$$

Termo geral: $w_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{4} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4}$

Resposta: Opção (**A**) $\frac{n+1}{4}$

5.

5.1. $u_n = 2 - \frac{5}{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & n+1 \\ \hline -2n-2 & 2 \\ -5 & \end{array}$$

$0 < \frac{5}{n+1} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 > -\frac{5}{n+1} \geq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

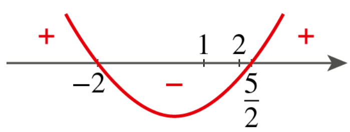
$\Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{5}{n+1} \geq -\frac{1}{2}$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq u_n < 2$, donde se conclui que (u_n) é limitada.

5.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} - v_n = 2n^2 - n - 10$

Estudo do sinal da expressão $2n^2 - n - 10$:

$$2n^2 - n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} \Leftrightarrow n = \frac{5}{2} \ \vee \ n = -2$$



Se $n \in \{0,1\}$, $v_{n+1} - v_n < 0$ (a sucessão não é crescente).

Se $n > 2$, $v_{n+1} - v_n > 0$ (a sucessão não é decrescente).

Conclui-se que a sucessão não é monótona.

6.

6.1. $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n-1-(1-n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

6.2. $v_1 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 3\times 4 = 12$

$v_2 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 3\times 16 = 48$

Razão: $r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{48}{12} = 4$

Termo geral: $v_n = v_1 \times r^{n-1} = 12\times 4^{n-1}$

Resposta: $v_n = 12\times 4^{n-1}$

7. Termo geral da sequência escrita pela Joana: $j_n = 15+(n-1)5 = 5n+10$

Termo geral da sequência escrita pelo Carlos: $c_n = 33+(n-1)3 = 3n+30$

Seja n o número de termos de cada uma das sequências.

Soma dos termos da sequência escrita pela Joana: $\frac{15+5n+10}{2}\times n = \frac{5n+25}{2}\times n$

Soma dos termos da sequência escrita pelo Carlos: $\frac{33+3n+30}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n$

Como as somas são iguais, tem-se: $\frac{5n+25}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n$

$$\frac{5n+25}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n \Leftrightarrow 5n+25 = 63+3n \Leftrightarrow 2n = 38 \Leftrightarrow n = 19$$

O último termo escrito pela Joana foi $j_{19} = 5\times 19+10 = 105$.

O último termo escrito pelo Carlos foi $c_{19} = 3\times 19+30 = 87$.

Resposta: O último termo da sequência da Joana foi 105 e o último do Carlos foi 87.