1.

1.1. A inclinação, em graus, da reta AE é igual a $180-\theta$.

O declive da reta AE é dado por $\tan(180-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

Resposta: **(C)** $-\tan\theta$

1.2. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$

Como $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=108^\circ$, tem-se:

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=2\times2\times\cos108^\circ$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\approx-1,24$

Resposta: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\approx-1,24$

2.

2.1. O ponto A pertence a Ox e tem a mesma abcissa de F.

Assim, conclui-se que $A(8,0,0)$.

Resposta: $A(8,0,0)$

2.2. O ponto C pertence a Oy e tem ordenada positiva.

$C(0,y,0)$, $y>0$

O ponto C pertence à superfície esférica de equação $(x-8)^2+y^2+z^2=100$, logo:

$(0-8)^2+y^2+0^2=100$

$(0-8)^2+y^2+0^2=100\Leftrightarrow y^2=36\Leftrightarrow y=6\vee y=-6$

Como $y>0$, conclui-se que $C(0,6,0)$.

$$\cos\left(C\hat{F}E\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE}}\right)=\frac{\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left\|\overrightarrow{FC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FE}\right\|}$$

$$\overrightarrow{FC}=C-F=(0,6,0)-(8,0,2)=(-8,6,-2)$$

O ponto E pertence a Oz e ao plano cuja equação é $x+4z-16=0$.

Assim, as coordenadas do ponto E são da forma $E(0,0,z)$.

$$0+4z-16=0\Leftrightarrow z=4$$

Assim, conclui-se que $E(0,0,4)$.

$$\overrightarrow{FE}=E-F=(0,0,4)-(8,0,2)=(-8,0,2)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE}}\right)=\frac{\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left\|\overrightarrow{FC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FE}\right\|}=\frac{(-8,6,-2)\cdot(-8,0,2)}{\sqrt{64+36+4}\times\sqrt{64+0+4}}=\frac{64-4}{\sqrt{7072}}=\frac{60}{\sqrt{7072}}$$

Recorrendo à calculadora, obtém-se $C\hat{F}E\approx 44,5^\circ$.

Resposta: $44,5^\circ$

3.

3.1. Se $n\leq 4$: $\frac{1}{4}\leq u_n\leq 4$ **(1)**

Se $n>4$: $-1\leq u_n\leq 1$ **(2)**

De (1) e (2) conclui-se que $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq u_n\leq 4$.

A sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: (A) A sucessão (u_n) é limitada.

3.2. Para $n\geq 5$, a soma de quatro termos consecutivos é igual a 0.

Como $50=4\times 12+2$, a soma dos 50 termos é igual a $u_5+u_6=1+0=1$.

$$u_5=\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\quad u_6=\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right)=\sin(3\pi)=0;$$

$u_7 = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; $\quad u_8 = \sin\left(\frac{8\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$

Resposta: (D) 1

4.

4.1. $v_1 = -2$

$v_2 = 1 + 2 \times v_1 = 1 + 2 \times (-2) = -3$

Seja r a razão da progressão aritmética.

$r = v_2 - v_1 = -3 - (-2) = -1$

Termo geral: $v_n = v_1 + (n-1)r = -2 + (n-1) \times (-2)$

$v_n = v_1 + (n-1)r = -2 + (n-1) \times (-1)$

$v_n = -n - 1$

Resposta: $v_n = -n - 1$

4.2. $w_n = \frac{-n-1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_n \notin V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left|u_n + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-n-1}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{-2n-2+2n+1}{4n+2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{4n+2}\right| \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} \geq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 4n+2 \leq 100 \Leftrightarrow n \leq \frac{98}{4}$

Como $\frac{98}{4} = 24,5$, conclui-se que existem 24 termos que não pertencem à $V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. $\frac{a+1}{a}=\frac{a+4}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)^2 = a(a+4) \Leftrightarrow a^2+2a+1=a^2+4a \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

Assim:

$a=\frac{1}{2}$, $a+1=\frac{3}{2}$ e $a+4=\frac{9}{2}$

Razão da progressão geométrica: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

Termo geral da progressão geométrica: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{18}\times 3^{n-1}$

$\frac{1}{18}\times 3^{n-1} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3^{n-1}=81 \Leftrightarrow 3^{n-1}=3^4$

Daqui resulta que $n-1=4$, ou seja, $n=5$.

Resposta: A ordem do último dos três termos considerados é 5.

6.

6.1. Se $\lim(u_n)=a$, então $a\neq 6$.

Se, por exemplo, considerar a vizinhança $V_{\frac{1}{2}}(6)$, não há termos da sucessão pertencentes a esta vizinhança, atendendo a que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<5$.

Daqui resulta que $\lim(u_n)$ não pode ser 6.

6.2. A sucessão (u_n) é convergente.

Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>u_n$, pelo que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n>0$ (sucessão crescente).

Sendo (u_n) crescente: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq u_1$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_1\leq u_n<5$ (sucessão limitada)

Sendo (u_n) monótona e limitada, conclui-se que é convergente.

7. $\begin{cases} u_1=0,20 \\ u_{n+1}=u_n+0,25u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0,20 \\ u_{n+1}=1,25u_n \end{cases}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 1,25 e primeiro termo igual a 0,20.

Termo geral: $u_n = 0,20 \times 1,25^{n-1}$

$u_{12} = 0,20 \times 1,25^{11}$
$u_{12} \approx 2,33$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

$S_{12} = 0,2 \times \frac{1-1,25^{12}}{1-1,25}$
$S_{12} \approx 10,84$

Resposta: Pela última hora, o custo foi 2,33 € e o custo total foi 10,84 €.