Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Dado um número real *k*, seja (a_n) uma sucessão de termos positivos, definida por recorrência da seguinte forma:

$$a_1 = 2 \wedge a_{n+1} = k + \frac{2}{a_n},\ n \in \mathbb{N}$$

Supondo que $a_2 = 4$, qual é o valor de *k*?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

2. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = 21 - 2n$ e $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}$, respetivamente.

2.1. A que é igual a soma dos primeiros 100 termos de ordem par da sucessão (u_n)?

(A) –8000 **(B)** 8000 **(C)** –18 100 **(D)** 18 100

2.2. Calcule $\lim\left[v_n\left(2^n + 1\right)\right]$.

2.3. Determine a(s) ordem(ns) do(s) termo(s) das sucessões (u_n) e (v_n) comum(ns) para $n \leq 20$.

Resolva esta questão recorrendo à calculadora gráfica.

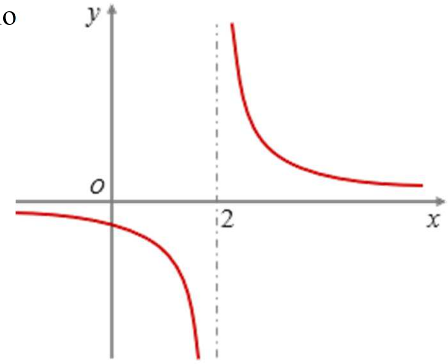
Na sua resposta refira os recursos utilizados com a calculadora e apresente os elementos recolhidos que lhe permitiram chegar ao resultado.

3. Calcule:

3.1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

3.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{2x + 2}$

4. Considere a função f, de domínio $[3, +\infty[$, definida por $f(x)=\sqrt{x-3}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, definida por $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, representada graficamente no referencial da figura.



4.1. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\dfrac{2n-1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 2

(C) $-\infty$ **(D)** $+\infty$

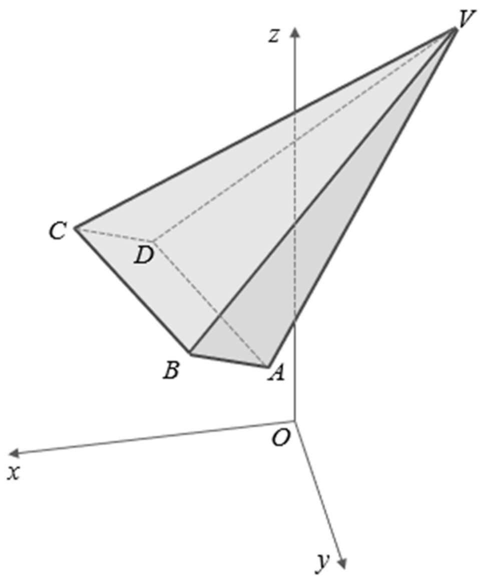
4.2. Calcule $f^{-1}(2)$.

4.3. Sem usar a calculadora, resolva a equação $f(x)=x-5$.

5. Um arquiteto está a projetar uma estrutura em forma de pirâmide $[ABCDV]$, cuja base é o losango $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 2, 3)$;
- o vértice C tem coordenadas $(5, 2, 7)$;
- o vértice B pertence à reta definida por $x=3 \wedge y=4$;
- o plano que contém a base da pirâmide é definido pela equação $-x+z-2=0$;
- o vértice V tem cota positiva;
- a projeção ortogonal do vértice V no plano da base é o ponto médio do segmento $[AC]$;
- o volume da pirâmide é igual 32.



Mostre que:

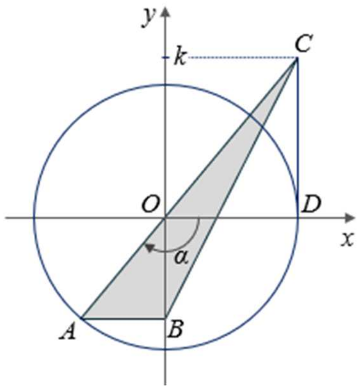
5.1. o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2, 2, 2)$;

5.2. o ponto D tem coordenadas $(3, 0, 5)$;

5.3. o ponto V tem coordenadas $(-3, 2, 11)$.

6. Na figura, estão representados, num referencial o. n. xOy, a circunferência de centro O e raio 2 e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:



- o ponto D tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto A pertence à circunferência e ao terceiro quadrante;
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Oy;
- a ordenada do ponto C é k;
- a reta AC passa no centro da circunferência;
- o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o segmento de reta $[CD]$ é paralelo ao eixo Oy;
- α é a amplitude do ângulo DOA, com orientação negativa $\left(\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

6.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, em função de α, é igual a $2\sin\alpha(\cos\alpha - 1)$?

6.2. Admita que o ponto A e tem abcissa $-\frac{8}{5}$.

a) Qual é o valor de k?

(A) $-\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $-\frac{3}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

b) Determine o valor exato de $5\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\tan(\alpha - \pi)$.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**Total**
10	10	12	16	16	16	10	12	16	12	12	16	16	10	16	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1. $a_2 = 4 \Leftrightarrow k + \frac{2}{a_1} = 4 \Leftrightarrow k + \frac{2}{2} = 4 \Leftrightarrow k + 1 = 4 \Leftrightarrow k = 3$

Opção correta: **(A)**

2.

2.1. (u_n) é uma progressão aritmética de razão -2:

$u_{n+1} - u_n = 21 - 2(n+1) - (21 - 2n) = 21 - 2n - 2 - 21 + 2n = -2$

Seja (w_n) a sucessão dos termos de ordem par da sucessão (u_n).

A soma dos 100 primeiros termos de ordem par da sucessão (u_n) é dada por:

$\mathrm{S}_{100} = \frac{w_1 + w_{100}}{2} \times 100 = \frac{u_2 + u_{200}}{2} \times 100$

$u_2 = 21 - 2 \times 2 = 17$

$u_{200} = 21 - 2 \times 200 = -379$

$\mathrm{S}_{100} = \frac{17 - 379}{2} \times 100 = \frac{-362}{2} \times 100 = -18\,100$

Opção correta: **(C)**

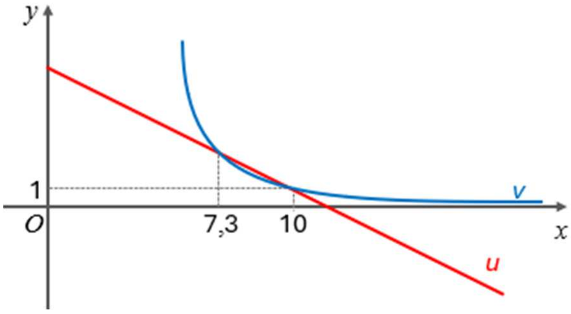
2.2. $\lim\left[v_n\left(2^n+1\right)\right] = \lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}\left(2^n+1\right)\right] = \lim\frac{2^n+1}{2^{n-10}} = \lim\frac{2^n+1}{2^n \times 2^{-10}} =$

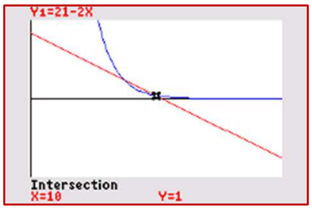
$= \frac{1}{2^{-10}}\lim\frac{2^n+1}{2^n} = 2^{10} \times \lim\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1024 \times (1+0) = 1024$

2.3. Os gráficos das funções reais de variável real definidas em $\mathbb{R}$ por $u(x) = 21 - 2x$ e $v(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-10}$ contêm os gráficos das sucessões (u_n) e (v_n), respetivamente.

A ordem ou as ordens dos termos representados graficamente pelos mesmos pontos, são as soluções da equação $u(x) = v(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e $n \leq 20$.

Na calculadora gráfica, no intervalo $[0, 20]$, verifica-se que os gráficos de u e v se intersetam em dois pontos, tendo somente uma abcissa natural igual a 10.





Portanto, as sucessões (u_n) e (v_n) têm em comum, para $n \leq 20$, o termo de ordem 10, igual a 1.

Em alternativa, podemos obter o mesmo resultado através da tabela das sucessões (u_n) e (v_n), para $n \leq 20$, onde se verifica que $u_n = v_n$ apenas para $n = 10$, sendo $u_{10} = v_{10} = 1$

n	u(n)	v(n)
1	19	512
2	17	256
3	15	128
4	13	64
5	11	32
6	9	16
7	7	8
8	5	4
9	3	2
10	1	1
11	-1	0.5

n=10

n	u(n)	v(n)
10	1	1
11	-1	0.5
12	-3	0.25
13	-5	0.125
14	-7	0.0625
15	-9	0.0313
16	-11	0.0156
17	-13	0.0078
18	-15	0.0039
19	-17	0.002
20	-19	9.8E-4

n=10

3.

3.1.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \underline{|0} \end{array}$$

3.2. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{2x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-x}{2x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x}{2x+2} =$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\underset{x<0}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x}{2x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1}{2+\frac{2}{x}} = \frac{-\sqrt{1-0}-1}{2+0} = \frac{-2}{2} = -1$$

4.

4.1. $\lim \frac{2n-1}{n} = \lim\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2^-$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Opção correta: **(C)**

4.2. Como $f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 2 \overset{x\geq 3}{\Leftrightarrow} x-3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$, então $f^{-1}(2) = 7$.

4.3. $f(x) = x-5 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = x-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-3 = (x-5)^2 \Leftrightarrow x-3 = x^2-10x+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-11x+28 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 7$

Verificação das soluções

$x = 4: \sqrt{4-3} = 4-5 \Leftrightarrow 1 = -1$ (falso)

$x = 7: \sqrt{7-3} = 7-5 \Leftrightarrow 2 = 2$ (verdadeiro) $\qquad S = \{7\}$

Cálculo auxiliar

$x^2-11x+28 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121-4\times 28}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 7$

5.

5.1. $B(3,\ 4,\ z)$

Como B é um ponto do plano de equação $-x+z-2=0$, tem-se:

$-3+z-2=0 \Leftrightarrow z=5$

Logo, $B(3,\ 4,\ 5)$.

Assim, $\overrightarrow{AB}=B-A=(3,\ 4,\ 5)-(1,\ 2,\ 3)=(2,\ 2,\ 2)$. $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 4,\ 5)$

5.2. $D=C+\overrightarrow{BA}=C-\overrightarrow{AB}=(5,\ 2,\ 7)-(2,\ 2,\ 2)=(3,\ 0,\ 5)$ $C(5,\ 2,\ 7)$

5.3. O ponto V pertence à reta, a seguir designada por r, que é perpendicular ao plano da base e que passa no ponto médio do segmento de reta $[AC]$.

$$M_{[AC]}\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{3+7}{2}\right)=(3,\ 2,\ 5)$$

A reta r é perpendicular ao plano ABC, pelo que um vetor diretor é o vetor de coordenadas $(-1,\ 0,\ 1)$, normal a esse plano.

$r:(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 5)+k(-1,\ 0,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$.

As coordenadas do vértice V são da forma $V(3-k,\ 2,\ 5+k),\ k\in\mathbb{R}$.

$$V_{[ABCDV]}=\frac{1}{3}A_{[ABCD]}\times h$$ h – altura da pirâmide

$$A_{[ABCD]}=\frac{D\times d}{2}$$ D – diagonal maior; d – diagonal menor

$$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$ $A(1,\ 2,\ 3)$, $C(5,\ 2,\ 7)$

$$\overline{BD}=\sqrt{0^2+4^2+0^2}=4$$ $B(3,\ 4,\ 5)$, $D(3,\ 0,\ 5)$

$D=4\sqrt{2}$ e $d=4$

$$A_{[ABCD]}=\frac{4\sqrt{2}\times 4}{2}=8\sqrt{2}$$

$$h=\overline{VM}=\sqrt{(3-k-3)^2+(2-2)^2+(5+k-5)^2}=$$ $V(3-k,\ 2,\ 5+k)$, $M(3,\ 2,\ 5)$

$$=\sqrt{(-k)^2+k^2}=\sqrt{2k^2}$$

Assim, $V_{\text{pirâmide}}=32 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times\sqrt{2k^2}=32 \Leftrightarrow \sqrt{k^2}=6 \Leftrightarrow k^2=36 \Leftrightarrow k=\pm 6$.

$k=6:(3-6,\ 2,\ 5+6)=(-3,\ 2,\ 11)$

$k=-6:(3+6,\ 2,\ 5-6)=(9,\ 2,\ -1)$

Como o ponto V tem cota positiva, $V(-3,\ 2,\ 11)$.

6.

6.1. $A_{[ABC]} = \dfrac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{2}$

$A(2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha)$; $\quad B(0,\ 2\sin\alpha)$; $\ C(2,\ 2\tan\alpha)$

$$A_{[ABC]} = \frac{(0-2\cos\alpha)(2\tan\alpha - 2\sin\alpha)}{2} = \frac{-4\cos\alpha\tan\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{-4\cos\alpha \times \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 4\cos\alpha\sin\alpha}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha = 2\sin\alpha(\cos\alpha - 1)$$

6.2. a) $k = 2\tan\alpha$ e $2\cos\alpha = -\dfrac{8}{5}$

$$2\cos\alpha = -\frac{8}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{25}{16} - 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\frac{3}{4}$$

$1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Como $\alpha \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, onde $\tan\alpha > 0$, então $k = 2\tan\alpha = 2\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Opção correta: **(D)**

b) $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ e $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$

$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

Como $\alpha \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, onde $\sin\alpha < 0$, então $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$.

Portanto, $5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) - 2\tan(\alpha - \pi) = 5\sin\alpha - 2\tan\alpha = -5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right) - 2\times\dfrac{3}{4} = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.