Máximo Matemática A 11

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere os vetores $\vec{u}(1, k, -2)$ e $\vec{v}(3, -1, k)$.

Para que valor de $k \in \mathbb{R}$ os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares?

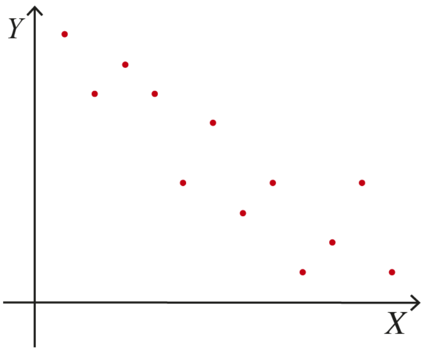
(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 3

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ por $f(x) = 1 + \frac{b}{x-3}$, com $b \in \mathbb{R}$, e (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n}$. Sabe-se também que $\lim f(u_n) = +\infty$.

Qual das seguintes opções pode ser o valor de b?

(A) -3 **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** 1 **(D)** 3

3. O diagrama de dispersão representado na figura mostra uma forte associação linear negativa entre as variáveis X e Y.



Em cada uma das opções seguintes, são dados um valor de r, coeficiente de correlação linear, e a equação de uma reta.

Em qual das opções poderão estar representados o valor de r e uma equação da reta de regressão linear da distribuição representada na figura?

(A) $r = -0{,}88$; $y = -0{,}66x + 8{,}98$

(B) $r = 0{,}88$; $y = 0{,}66x + 8{,}98$

(C) $r = -0{,}32$; $y = -0{,}76x + 7{,}85$

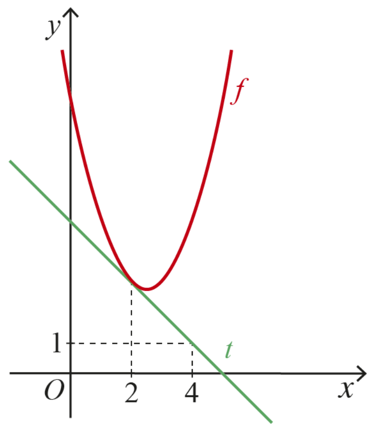
(D) $r = 0{,}32$; $y = 0{,}76x + 7{,}85$

4. Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n = \dfrac{\cos n}{2n^2 + n}$.

Qual é o valor de $\lim v_n$?

(A) -2 **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

5. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função *f* e a reta *t*, tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 2.

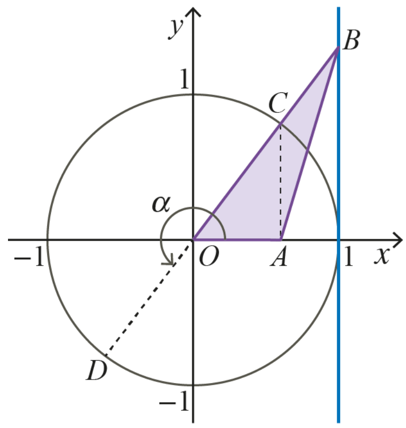


A reta *t* passa nos pontos de coordenadas $(0, 5)$ e $(4, 1)$.

Qual é o valor de $f'(2)$?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** -2 **(D)** -1

6. Na figura, estão representados, em referencial o. n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o triângulo $[OAB]$.



Sabe-se que:

- $[DC]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto C pertence ao 1.º quadrante;
- B é o ponto de interseção da reta DC com a reta de equação $x = 1$;
- o segmento de reta $[AC]$ é paralelo ao eixo Oy;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo com orientação, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta OD, com $\alpha \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

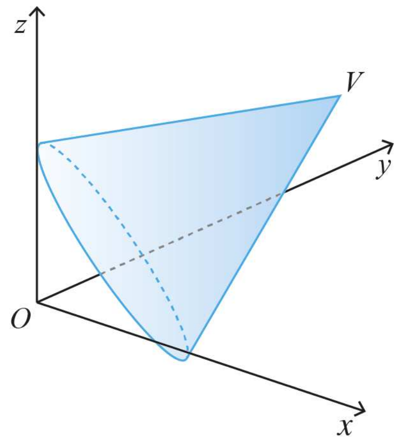
Sabendo que $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, calcule a área do triângulo $[OAB]$.

Comece por mostrar que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a $-\dfrac{\sin\alpha}{2}$.

7. De uma progressão aritmética (u_n), sabe-se que o quinto termo é igual a 12 e que a soma do terceiro termo com o oitavo termo é igual a 31.

Averigue, sem recorrer à calculadora, se o número 60 é termo da progressão (u_n).

8. Na figura, está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, um cone reto.



Sabe-se que:

- a base do cone é um círculo contido no plano α de equação $x+y+z=3$, cuja circunferência interseta os eixos coordenados.
- o vértice do cone é o ponto $V(4,\ 4,\ 4)$.

8.1. Mostre que o ponto $C(1,\ 1,\ 1)$ é o centro da base do cone.

8.2. Calcule o volume do cone.

9. Considere, para um certo número real *k*, a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+4x}{2x-2} & \text{se } x<1 \\ 2k-1 & \text{se } k=1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

9.1. Sabe-se que $2k-1=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Qual é o valor de k ?

9.2. Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

9.3. Considere a função *f* para $x\in\left]1,\ +\infty\right[$.

a) Mostre que $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 2.

10. Nas bibliotecas escolares do Agrupamento de Escolas de Cabeceiras de Basto, decidiu-se analisar a possível relação entre a temperatura máxima diária e o número de livros requisitados.
Durante 8 dias consecutivos de primavera, foram registados os seguintes dados:

Dia	Temperatura máxima (ºC)	N.º de livros requisitados
1	18	35
2	20	31
3	21	32
4	24	25
5	25	24
6	22	29
7	19	33
8	26	20

10.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados na tabela.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

Quanto ao número de livros requisitados nos oito dias, a média é aproximadamente igual a __**I**__ livros e a mediana é igual a __**II**__ livros.

Relativamente às temperaturas registadas, a amplitude interquartis é igual a __**III**__ °C.

O coeficiente de correlação linear entre a temperatura (X) e o número de livros (Y), arredondado às milésimas, é igual a __**IV**__ **.**

I	**II**	**III**	**IV**
a) 28 **b)** 28,6 **c)** 30	**a)** 29 **b)** 29,5 **c)** 30	**a)** 4 **b)** 5 **c)** 8	**a)** $-0{,}979$ **b)** $0{,}958$ **c)** $1{,}310$

10.2. Utilizando a reta de regressão, estime o número de livros que seriam requisitados num dia em que a temperatura máxima fosse de 23 °C.
Apresente o resultado arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.a)**	**9.3.b)**	**10.1.**	**10.2.**	**Total**
12	12	12	12	12	14	14	15	14	14	15	14	14	12	14	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1. $(1,\ k,\ -2)\cdot(3,\ -1,\ k)=0 \Leftrightarrow 3-k-2k=0 \Leftrightarrow -3k=-3 \Leftrightarrow k=1$

Resposta: (C)

2. $\lim u_n = \lim \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n} = \lim \dfrac{3\times 3^n+2^n}{3^n} = \lim \dfrac{3^n\left(3+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n} \lim\left(3+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3+0^+ = 3^+$

Logo, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(1+\dfrac{b}{x-3}\right) = 1+\dfrac{b}{0^+}$.

Como $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, então $b>0$.

Resposta: (D)

3. A associação linear entre as variáveis é negativa (A e C) e forte (A).

Resposta: (A)

4. $\lim v_n = \lim \dfrac{\cos n}{2n^2+n} = \lim\left(\dfrac{1}{2n^2+n}\times \cos n\right) = 0$, pois $\lim \dfrac{1}{2n^2+n} = \lim \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ e a sucessão definida por $\cos(n)$ é limitada $(\forall n\in\mathbb{N}, -1\le \cos n \le 1)$.

Resposta: (B)

5. $f'(2)$ é o declive da reta *t*.

Como a reta *t* passa nos pontos de coordenadas $(0,\ 5)$ e $(4,\ 1)$, tem-se:

$$f'(2) = m_t = \frac{5-1}{0-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

Resposta: (D)

6. $D(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

$C(-\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$ (O ponto C é simétrico do ponto D relativamente à origem.)

$A(-\cos\alpha,\ 0)$

$B(1,\ \tan\alpha)$

$$A_{[OAB]} = \frac{-\cos\alpha\times\tan\alpha}{2} = \frac{-\cos\alpha\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2} = -\frac{\sin\alpha}{2} = -\frac{-\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10}$$

7. Sendo r a razão da progressão aritmética, tem-se:

$$\begin{cases} u_5 = 12 \\ u_3 + u_8 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r = 12 \\ u_1 + 2r + u_1 + 7r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 - 4r \\ 2u_1 + 9r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 - 4r \\ 2(12 - 4r) + 9r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 - 4r \\ 24 - 8r + 9r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 - 4r \\ r = 31 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 - 4 \times 7 \\ r = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -16 \\ r = 7 \end{cases}$$

A expressão do termo geral de (u_n) é:

$$u_n = u_1 + (n-1)r = -16 + (n-1) \times 7 = 7n - 7 - 16 = 7n - 23$$

$$u_n = 60 \Leftrightarrow 7n - 23 = 60 \Leftrightarrow 7n = 83 \Leftrightarrow n = \frac{83}{7}$$

Como $\frac{83}{7} \notin \mathbb{N} \left(\frac{83}{7} \approx 11{,}9\right)$, então 60 não é termo da progressão (u_n).

8.

8.1. A reta perpendicular ao plano α que passa no ponto V interseta a base do cone no centro.

Seja p essa reta.

Um vetor diretor da reta p é $\vec{p}(1, 1, 1)$.

Como a reta passa no ponto $V(4, 4, 4)$, uma equação vetorial da reta p é:

$p : (x, y, z) = (4, 4, 4) + k(1, 1, 1),\ k \in \mathbb{R}$.

<u>Determinação das coordenadas do ponto C</u>

Como C pertence à reta p, é da forma $(4+k, 4+k, 4+k)$, $k \in \mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas de C na equação $x + y + z = 3$, do plano da base, vem:

$4 + k + 4 + k + 4 + k = 3 \Leftrightarrow 3k = -9 \Leftrightarrow k = -3$

Logo, C tem coordenadas $(4-3, 4-3, 4-3)$, ou seja, $C(1, 1, 1)$

Portanto, o ponto $C(1, 1, 1)$ é o centro da base do cone.

8.2. $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$; $h -$ altura do cone; $A_{\text{base}} -$ área do círculo base do cone

<u>Determinação da área da base</u>

Por exemplo, o eixo Ox interseta o plano α interseta o plano de equação $x + y + z = 3$ no ponto $P(x, 0, 0)$.

Vem: $x + 0 + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3$

Logo, $P(3, 0, 0)$.

O raio da circunferência da base é:

$$r = \overline{PC} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Assim, $A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$.

<u>Determinação da altura</u>

$$h = \overline{PV} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

<u>Volume do cone</u>

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times 6\pi \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,\pi\ \text{cm}^3$$

9.

9.1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

Assim, vem:

$$2k - 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 2k-1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4k - 2 = 3 \Leftrightarrow 4k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Portanto, $k = \frac{5}{4}$.

9.2. <u>Assíntotas verticais</u>

Para $x \in \left]-\infty, 1\right[$, a função *f* é contínua por se tratar da composta, soma e quociente de funções contínuas;

Para $x \in \left]1, +\infty\right[$, a função *f* é contínua por se tratar de uma função racional contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Vimos que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2+1}+4x}{2x-2} = \frac{\sqrt{1^2+1}+4\times 1}{2\times 1 - 2} = \frac{\sqrt{2}+4}{0^-} = -\infty$$

Logo a reta de equação $x = 1$ é a única que é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

<u>Assíntotas horizontais</u>

Como D_f não é minorado nem majorado, poderá haver assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+4x}{2x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+4x}{2x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+4x}{2x-2} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+4\right)}{x\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+4}{2-\frac{2}{x}} = \frac{-\sqrt{1+0}+4}{2-0} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

As retas de equações $y=\frac{3}{2}$ e $y=1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de *f* quando $x\to-\infty$ e quando $x\to+\infty$, respetivamente.

9.3. **a)** Se $x\in\left]1,+\infty\right[$, $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$.

Assim:

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x+1}\right)'=\frac{(x+2)'(x+1)-(x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x+1-x-2}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) A equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 é $t: y=mx+b$, tal que:

- $m=f'(2)=-\frac{1}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9}$
- $f(2)=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$

$$\frac{4}{3}=-\frac{1}{9}\times2+b \Leftrightarrow \frac{4}{3}+\frac{2}{9}=b \Leftrightarrow \frac{14}{9}=b$$

Logo, a equação da reta pedida é $t:\ y=-\frac{1}{9}x+\frac{14}{9}$

10.

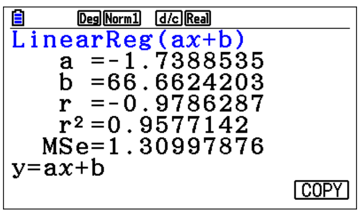
10.1. **I** – b

II – c

III – b $\boxed{Q_1=19{,}5\,;\ Q_3=24{,}5\,;\ Q_3-Q_1=24{,}5-19{,}5=5}$

IV – a

10.2. Com os dados da tabela, recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se a reta de regressão linear $y=-1{,}7388535X+66{,}6624203$, sendo *X* a temperatura máxima registada e *Y* o número de livros requisitados.



$y=-1{,}7388535\times23+66{,}6624203\approx27$

Utilizando a equação da reta de regressão, estima-se que o número de livros requisitados num dia em que a temperatura máxima fosse de 23 °C seria aproximadamente igual a 27.