Proposta de teste de avaliação

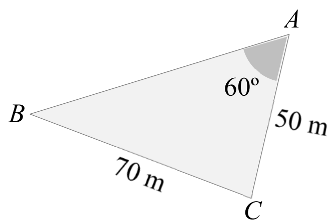
Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 120 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representado, em esquema, um terreno com a forma de um triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AC} = 50$ m, $\overline{BC} = 70$ m e $B\hat{A}C = 60^{\circ}$.

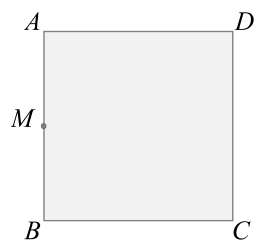


O comprimento, em metros, de $[AB]$ é igual a:

(A) 78 **(B)** 80 **(C)** 82 **(D)** 84

2. Na figura, está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 2.

M é o ponto médio de $[AB]$.

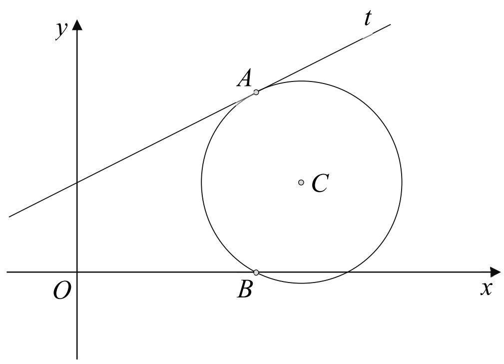


O valor do produto escalar $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ é:

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

3. Na figura, estão representadas, num referencial ortonormado xOy:

- a circunferência de centro C que passa no ponto B, de coordenadas $(4, 0)$;
- a reta t, definida pela equação $x - 2y + 4 = 0$ e tangente à circunferência no ponto A, de abcissa 4.



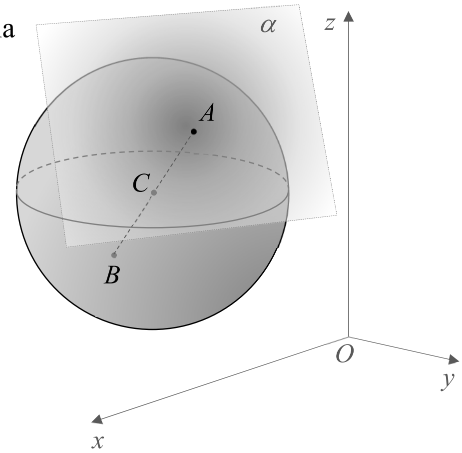
3.1. Seja α a inclinação da reta t.

Determine o valor de $5\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

3.2. Determine a equação reduzida da circunferência da figura.

4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$:

- os pontos A, B e C;
- a superfície esférica de centro no ponto C, definida pela equação $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=9$;
- o plano α, tangente à superfície esférica no ponto A.



Sabe-se que o ponto A tem coordenadas $(3, -2, 5)$ e que $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica.

4.1. As coordenadas do ponto B são:

(A) $(5, -7, 0)$ **(B)** $(4, -3, 1)$

(C) $(0, -5, 5)$ **(D)** $(1, -6, 1)$

4.2. Determine uma equação do plano α.

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5. De uma sucessão (u_n), sabe-se que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{n^2+n}$.

5.1. Se o quarto termo de (u_n) é igual a $\dfrac{21}{20}$, então o quinto termo é igual a:

(A) 1 **(B)** $\dfrac{11}{10}$ **(C)** $\dfrac{29}{30}$ **(D)** $\dfrac{61}{60}$

5.2. Sabendo que (u_n) é uma sucessão de termos positivos, justifique que é convergente.

6. Considere a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ e a função f, de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-x}{(x-1)^2}$.

6.1. Estude a sucessão (v_n) quanto à monotonia.

6.2. A que é igual $\lim f(v_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

6.3. Mostre que o gráfico da função f tem uma assíntota horizontal.

7. De uma progressão aritmética (a_n), sabe-se que $a_{26} = 100$ e que a soma dos 101 primeiros termos é igual a 0.

Determine uma expressão do termo geral de (a_n).

8. Num determinado instante, um reservatório com a capacidade de $10\,000$ litros contém uma mistura de 2000 litros de água com 2000 litros de sumo de maçã. A partir desse instante inicial, duas condutas de caudal constante introduzem, no reservatório, sumo de manga e sumo de laranja à razão de 400 litros por hora e 600 litros por hora, respetivamente.

O processo termina logo que o reservatório fique cheio.

8.1. Mostre que a percentagem de sumo de laranja existente no reservatório, t horas após começar a ser aí introduzido, é dada por $P(t) = \dfrac{3t}{20+5t}$, $0 \le t \le 6$.

8.2. Ao fim de quanto tempo o reservatório contém 35% de sumo de laranja?

Apresente o resultado em horas e minutos.

9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{2} + 4x^3 - \dfrac{3}{2}x^4$.

9.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

9.2. Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

FIM

Cotações:

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1**	**9.2.**	**Total**
10	10	15	15	10	10	10	10	15	10	15	15	15	15	10	15	**200**

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

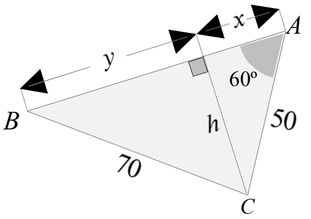
$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u'$, $(n \in \mathbb{R})$

Proposta de resolução

1. De acordo com a figura, vem:



$\overline{AB} = x + y$

$\frac{x}{50} = \cos 60^{\circ} \Leftrightarrow x = 50 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 25$

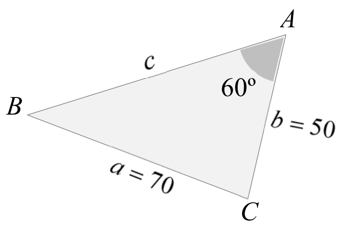
$\frac{h}{50} = \sin 60^{\circ} \Leftrightarrow h = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 25\sqrt{3}$

$y^2 + h^2 = 70^2$

$y^2 + \left(25\sqrt{3}\right)^2 = 70^2 \Leftrightarrow y^2 = 4900 - 25^2 \times 3 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{3025} \Leftrightarrow y = 55$

$\overline{AB} = 25 + 55 = 80$

Em alternativa, pela lei dos cossenos:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$70^2 = 50^2 + c^2 - 2 \times 50c \times \cos 60^{\circ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4900 = 2500 + c^2 - 50c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 - 50C - 2400 = 0 \Leftrightarrow$

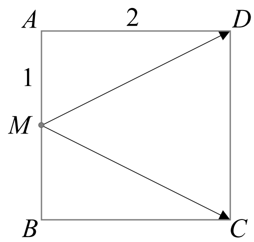
$\Leftrightarrow c = \frac{50 \pm \sqrt{2500 + 4 \times 2400}}{2} \Leftrightarrow c = \frac{50 \pm \sqrt{12\,100}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = \frac{50 \pm 110}{2} \Leftrightarrow c = 80 \vee c = -30$

Como $\overline{AB} > 0$, $\overline{AB} = 80$.

Resposta: (B)

2. $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) =$

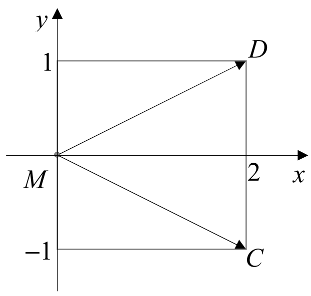


$= \left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) =$

$= -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} =$

$= -\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 - 0 + 0 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = -1^2 + 2^2 = 3$

Em alternativa, adotando um referencial conveniente, temos:



$\overrightarrow{MD} = (2, 1)$ e $\overrightarrow{MC} = (2, -1)$

$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$

Resposta: (C)

3. $t:\ x-2y+4=0 \Leftrightarrow 2y=x+4 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+2$

$B(4,\,0)$

3.1. O declive da reta t é $m=\frac{1}{2}$.

Se α é a inclinação da reta t, então $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ e $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

Como $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, vem:

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Então:

$$5\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=5\cos\alpha\left(-\sin\alpha\right)=-5\cos\alpha\sin\alpha=$$

$$=-5\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=-5\times\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-5\times\frac{2}{5}=-2$$

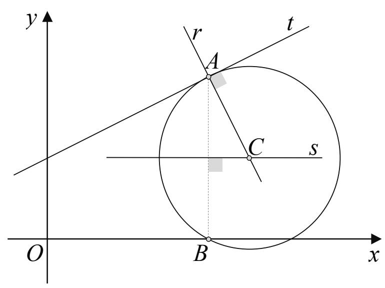
3.2. $t:\ y=\frac{1}{2}x+2$

$B(4,\,0)$

O ponto $A(4\,,\,y)$ pertence à reta t.

Logo, $y=\frac{1}{2}\times 4+2 \Leftrightarrow y=4$.

Portanto, $A(4\,,\,4)$.



Se a reta t é tangente à circunferência no ponto A, então a reta r, que passa no ponto $A(4\,,\,4)$ e é perpendicular à reta t, passa no centro da circunferência.

Declive da reta r: $m'=-\frac{1}{m}=-2$

Equação da reta r: $y-4=-2(x-4) \Leftrightarrow y=-2x+8+4 \Leftrightarrow y=-2x+12$

Como $[AB]$ é uma corda da circunferência, a mediatriz de $[AB]$ passa no centro, C.

Sendo $A(4\,,4)$ e $B(4\,,\,0)$, a mediatriz de $[AB]$ é a reta s de equação $y=\frac{4+0}{2} \Leftrightarrow y=2$.

O centro da circunferência é o ponto de interseção das retas r e s, logo:

$$\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=-2x+12 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=10 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

$C(5\,,2)$

Raio da circunferência:

$$r=\overline{AC}=\sqrt{(5-4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

Equação da circunferência:

$$(x-5)^2+(y-2)^2=5$$

4.

4.1. A superfície esférica tem centro no ponto $C(2,-4,3)$ e raio 3.

$A(3,-2,5)$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-4,3)-(3,-2,5)=(-1,-2,-2)$$

$$B=C+\overrightarrow{CB}=C+\overrightarrow{AC}=(2,-4,3)+(-1,-2,-2)=(1,-6,1)$$

Resposta: (D)

4.2. Se o plano α é tangente à superfície esférica no ponto A, então $\overrightarrow{AC}(-1,-2,-2)$ é um vetor normal a esse plano. Por outro lado, como o plano α passa no ponto $A(3,-2,5)$, vem:

$$-1(x-3)-2(y+2)-2(z-5)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+3-2y-4-2z+10=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x-2y-2z+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2y+2z-9=0$$

Logo, $x+2y+2z-9=0$ é uma equação do plano α.

5. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-u_{n+1}=\dfrac{1}{n^2+n}$

5.1. $u_4=\dfrac{21}{20}$

$$u_4-u_5=\frac{1}{4^2+4} \Leftrightarrow \qquad \left|\; u_n-u_{n+1}=\frac{1}{n^2+n} \wedge n=4\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{20}-u_5=\frac{1}{20} \Leftrightarrow u_5=\frac{21}{20}-\frac{1}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_5=\frac{21}{20}-\frac{1}{20} \Leftrightarrow u_5=\frac{20}{20} \Leftrightarrow u_5=1$$

Resposta: (A)

5.2. Se (u_n) é uma sucessão de termos positivos, então $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é minorada.

Por outro lado, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n^2+n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n^2+n}$.

Logo $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ou seja, (u_n) é decrescente.

Portanto, podemos concluir que (u_n) é convergente, porque toda a sucessão decrescente e minorada é convergente.

6. $v_n = \frac{n+2}{n+1}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{(x-1)^2}$

6.1. $$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)-(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2+3n+n+3-n^2-4n-4}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

$v_{n+1} - v_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (v_n) é monótona decrescente.

6.2. $\lim v_n = \lim \frac{n+2}{n+1} = \lim \frac{n}{n} = 1$

Como (v_n) é decrescente, $\lim v_n = 1$ por valores superiores a 1.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-x}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{(x-1)^2(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-x^2}{(x-1)^2(\sqrt{x}+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-x(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x}{(x-1)(\sqrt{x}+x)} = \frac{-1}{0^+ \times 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Como $v_n \to 1^+$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, conclui-se que $\lim f(v_n) = -\infty$.

Resposta: (D)

6.3. $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1\right)}{x\left(x-2+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-2+\frac{1}{x}} = \frac{0-1}{+\infty-2+0} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f.

7. $a_n = a_1 + (n-1) \times r$

$a_{26} = 100$; $S_{101} = 0$

$$\begin{cases} a_{26} = 100 \\ S_{101} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (26-1) \times r = 100 \\ \dfrac{a_1 + a_{101}}{2} \times 101 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 25r = 100 \\ a_1 + a_{101} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 25r = 100 \\ a_1 + a_1 + 100r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 25r = 100 \\ 2a_1 + 100r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -50r + 25r = 100 \\ a_1 = -50r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -25r = 100 \\ a_1 = -50r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -4 \\ a_1 = -50 \times (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -4 \\ a_1 = 200 \end{cases}$$

$a_n = 200 + (n-1) \times (-4)$

$a_n = 200 - 4n + 4$

$a_n = -4n + 204$

8.

8.1. Quantidade, em litros, de mistura existente decorridas t horas:

Água	2000
Sumo de maçã	2000
Sumo de manga	$400t$
Sumo de laranja	$600t$
Total	$4000 + 1000t$

Percentagem de sumo de laranja:

$$P(t) = \frac{600t}{4000 + 1000t} = \frac{6t}{40 + 10t} = \frac{3t}{20 + 5t}$$

No instante inicial, existem, no reservatório, $2000 + 2000 = 4000$ litros de líquido.

$10\,000 - 4000 = 6000$

São vertidos, no reservatório, $400 + 600 = 1000$ litros de sumo por hora. Logo, o reservatório fica cheio ao fim de 6 horas.

Portanto, $P(t) = \dfrac{3t}{20 + 5t}$, com $0 \le t \le 6$.

8.2. Pretendemos resolver a equação $P(t) = 35\%$.

$$P(t) = 0{,}35 \Leftrightarrow \frac{3t}{20 + 5t} = 0{,}35 \wedge 0 \le t \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t = 7 + 1{,}75t \wedge 0 \le t \le 6 \Leftrightarrow 1{,}25t = 7 \wedge 0 \le t \le 6 \Leftrightarrow t = \frac{7}{1{,}25} \wedge 0 \le t \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 5{,}6 \text{ h} \Leftrightarrow t = 5 \text{ h } 36 \text{ min} \qquad \big|\, 0{,}6 \times 60 = 36$$

O reservatório contém 35% de sumo de laranja decorridas 5 h 36 min.

9. $f(x)=\frac{1}{2}+4x^3-\frac{3}{2}x^4$

9.1. $f(1)=\frac{1}{2}+4\times 1^3-\frac{3}{2}\times 1^4=\frac{1}{2}+4-\frac{3}{2}=4-1=3$

Ponto de tangência: $P(1,3)$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}+4x^3-\frac{3}{2}x^4\right)'=0+12x^2-4\times\frac{3}{2}x^3=12x^2-6x^3$$

Declive: $m=f'(1)=12-6=6$

Equação pedida: $y-3=6(x-1)\Leftrightarrow y=6x-6+3\Leftrightarrow y=6x-3$

9.2. $f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-6x^3=0\Leftrightarrow 6x^2(2-x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2=0\vee 2-x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$6x^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{17}{2}$ Máx.	$\searrow$

$f(2)=\frac{1}{2}+4\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^4=\frac{1}{2}+4\times 8-\frac{3}{2}\times 16=$

$=\frac{1}{2}+32-24=\frac{1}{2}+8=\frac{17}{2}$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e estritamente decrescente em $[2,+\infty[$.

A função f admite um máximo relativo (e absoluto) igual a $\frac{17}{2}$ para $x=2$.