Proposta de teste de avaliação

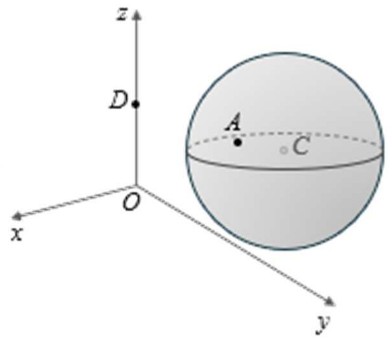
Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:** MAIO 2024

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de centro no ponto C, de equação $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.



Sabe-se que:

- o ponto $A(-1,3,2)$ pertence à superfície esférica;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica;
- D é um ponto do eixo Oz de ordenada positiva;
- o plano α é tangente à superfície esférica no ponto A.

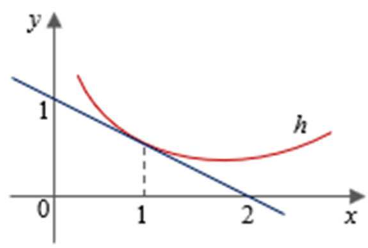
1.1. Quais são as coordenadas do ponto B ?

(A) $(-5,1,0)$ **(B)** $(5,-1,0)$ **(C)** $(-1,3,2)$ **(D)** $(1,-3,-2)$

1.2. Determine uma equação do plano α.

1.3. Determine, em graus, a amplitude do ângulo AOD.
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

2. Na figura, estão representadas, em referencial o. n. xOy:



- parte do gráfico de uma função h;
- a reta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 e que interseta o eixo Ox e o eixo Oy nos pontos de coordenadas $(2,0)$ e $(0,1)$, respetivamente.

Qual é o valor de $h'(1)$, derivada da função h no ponto de abcissa 0?

(A) -2 **(B)** 2 **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-3x}{x^2+x-2} & \text{se } x>1 \\ -2x^2+4x-3 & \text{se } x\le 1 \end{cases}$

3.1. Estude a continuidade da função.

3.2. Determine, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico de f.

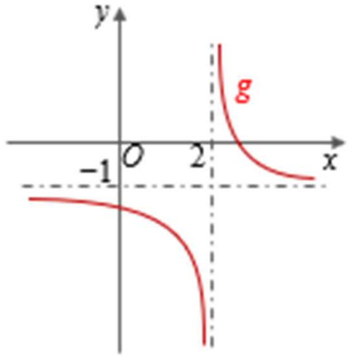
4. De uma progressão aritmética (a_n), sabe-se que o terceiro termo é $\frac{3}{2}$ e que o oitavo termo é 4

Qual é a soma dos primeiros vinte termos da sucessão (a_n)?

(A) 100 **(B)** 105 **(C)** 110 **(D)** 115

5. Na figura, em referencial o. n. Oxy, está representada a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, e as assíntotas ao seu gráfico. Sabe-se que:

- a reta de equação $y=-1$ é assintota ao gráfico de *f*;
- o gráfico de *f* interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.



5.1. Mostre que: $g(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$

5.2. Resolva a inequação $g(x)\geq -2x$.

5.3. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=\dfrac{2n+1}{n}$.

A que é igual $\lim g(u_n)$?

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

6. Considere a função *f*, definida em $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ por $f(x)=-3\tan x-2\cos x$.

6.1. Sabe-se que $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\dfrac{3}{5}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $f(\alpha)$.

6.2. Mostre que $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x-2}{\cos x}$.

6.3. Resolva a equação $f(x)=0$.

6.4. Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico da função *f* com a reta de equação $y=5$ e com o eixo Ox, respetivamente.

Calcule, recorrendo à calculadora gráfica, a área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta deve:

- apresentar a equação que lhe permite resolver o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- determinar a abcissa do ponto *B*, com arredondamento às centésimas.

7. Considere a nuvem de pontos representada na figura.

Qual dos números seguintes pode ser o coeficiente de correlação linear das duas variáveis?

(A) $-0,4$ **(B)** $-0,9$ **(C)** $0,6$ **(D)** $0,95$

FIM

COTAÇÕES (em pontos)																
1.1.	1.2.	2.	3.	3.1.	3.2.	4.	5.1.	5.2.	5.3.	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	7.	Total
10	15	10	14	14	15	10	15	16	10	15	15	16	15	10	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. $B = C + \overrightarrow{AC}$; $A(-1,3,2)$; $C(-3,2,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,2,1)-(-1,3,2) = (-2,-1,-1)$

$B = (-3,2,1)+(-2,-1,-1) = (-5,1,0)$

Resposta: (A)

1.2. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é normal ao plano α.

Como o plano α passa no ponto *A*, vem:

$-2(x+1)-(y-3)-(z-2)=0 \Leftrightarrow -2x-2-y+3-z+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-y-z+3=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-3=0$

Logo, $2x+y+z-3=0$ é uma equação do plano α.

1.3. $Z(0,0,z), z \in \mathbb{R}^+$

$\overrightarrow{OA} = A$; $\overrightarrow{OZ} = Z$

$$\cos\left(A\hat{O}D\right) = \frac{(0,0,z)\cdot(-1,3,2)}{\sqrt{0^2+0^2+z^2}\times\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{2z}{\sqrt{z^2}\times\sqrt{14}} = \frac{2z}{z\times\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

Logo, a amplitude do ângulo *AOD* é aproximadamente igual a 58°.

2. $h'(1)$ é igual ao declive da reta *t*.

A reta *t* passa nos pontos de coordenadas $(2,0)$ e $(0,1)$.

$m_t = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$. Logo, $h'(1) = -\frac{1}{2}$.

Resposta: (C)

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

Em $]-\infty, 1[$: a função *f* é contínua, por ser uma função polinomial (contínua em $\mathbb{R}$);

Em $]1,+\infty[$: a função *f* é contínua, por ser uma função racional (contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$)

No ponto $x=1$:

$f(1) = -2\times1^2+4\times1-3=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(-2x^2+4x-3\right)=-1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{3-3x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to1^+}\frac{-3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to1^+}\frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{1+2} = -1$$

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{-1-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

Portanto, a função *f* é contínua em $\mathbb{R}$.

3.2. Como a função é contínua, então o seu gráfico não admite qualquer assintota vertical.

- Em $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x^2+4x-3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x^2\right) = -\infty$$

Sendo este limite infinito, o gráfico de f não admite assíntota.

- Em $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x} = 0$$

Portanto, a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

4. $a_3 = \frac{3}{2}$; $a_8 = 4$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20$$

$$a_8 = a_3 + 5r \Leftrightarrow 4 = \frac{3}{2} + 5r \Leftrightarrow 5r = 4 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 5r = \frac{5}{2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_3 - 2r = \frac{3}{2} - 2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; ; \; a_{20} = a_8 + 12r = 4 + 12\times\frac{1}{2} = 10$$

$$S_{20} = \frac{\frac{1}{2}+10}{2} \times 20 = 105$$

Resposta: (B)

5.1. A função f é definida por $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Dado que as retas de equações $x=2$ e $y=-1$ são assíntotas ao gráfico de g, $a=-1$ e $c=2$, obtendo-se:

$$g(x) = -1 + \frac{b}{x-2}$$

Como o gráfico de g contém o ponto de coordenadas $A(3, 0)$, tem-se:

$$g(3) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{b}{3-2} = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Portanto, $g(x) = -1 + \frac{1}{x-2} = \frac{-x+2+1}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$.

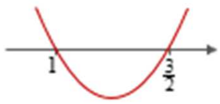
5.2. $g(x) \geq -2x \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2} \geq -2x \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2} + 2x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3-x+2x^2-4x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-5x+3}{x-2} \geq 0$

$2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\times 2\times 3}}{2\times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 1$



x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$2x^2-5x+3$	+	0	−	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
$\frac{2x^2-5x+3}{x-2}$	−	0	+	0	−	ND	+

O conjunto-solução da inequação é $S = \left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left]2, +\infty\right[$.

5.3. $u_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

$\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2^+$

$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

Resposta: (D)

6.1. $\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

Como α é um ângulo do 4.º quadrante, pois $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\sin x < 0$, então $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

Portanto, $f(\alpha) = -3\tan\alpha - 2\cos\alpha = -3\times\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\times\frac{4}{5} = \frac{9}{4} - \frac{8}{5} = \frac{13}{20}$

6.2. $f(x) = -3\tan x - 2\cos x = \dfrac{-3\sin x}{\cos x} - 2\cos x =$

$= \dfrac{-3\sin x - 2\cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{-3\sin x - 2\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos x} =$

$= \dfrac{-3\sin x - 2 + 2\sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x - 2}{\cos x}$

$y = \sin x$
$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times 2\times(-2)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$
$x = -\dfrac{1}{2} \vee x = 2$

6.3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x - 2}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sin x = 2 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2}\right) \wedge \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$

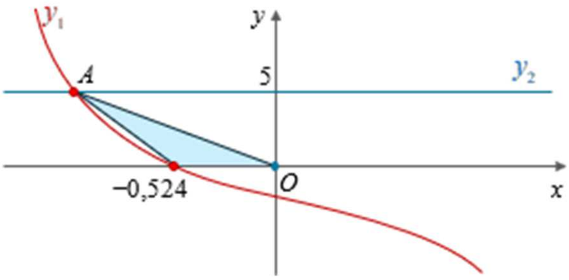
$\Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$ | $\sin x = 2$ é uma condição impossível

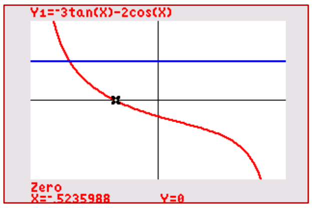
Como x é um ângulo do quarto quadrante, pertencente ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x = -\dfrac{\pi}{6}$

O conjunto-solução da equação é $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

6.4. A abcissa do ponto B é o zero da função f .

Na calculadora gráfica, fazendo $y_1 = -3\tan x - 2\cos x$ e $y_2 = 5$, vem:





A altura do triângulo $[OAB]$, em relação à base $[OB]$, é igual a 5 (ordenada do ponto A).

O ponto B, ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem abcissa

aproximadamente igual a $-0,52$: $B(-0,52;0)$

$\overline{OB} \approx 0,52$

A área do triângulo $[OAB]$ é $\dfrac{\overline{OB}\times 5}{2} \approx \dfrac{0,52\times 5}{2} = 1,3$

7. **Resposta:** (C)