TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1. Sabe-se que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, pelo que:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha + 1 = 6 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha = 5 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha = \pm\sqrt{5}$$

$0 \leq \alpha < 180°$ e $\cos\alpha > 0$, logo $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{5}$.

A equação reduzida da reta s é da forma $y = \sqrt{5}x + b$.

Como o ponto A, de coordenadas $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, pertence à reta, então:

$$0 = \sqrt{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right) + b \Leftrightarrow b = 3$$

A equação reduzida da reta s é $y = \sqrt{5}x + 3$.

Determinemos as coordenadas do ponto B:

$$0 = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

B tem coordenadas $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$.

Sabemos que o ponto C é o ponto de interseção das duas retas, logo, podemos determinar as suas coordenadas resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{5}x + 3 \\ y = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \sqrt{5}x + 3 = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \frac{2\sqrt{5}}{3}x = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ x = -\frac{15}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) + 3 \\ x = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{15}{2} + 3 \\ x = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{9}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto C são $\left(\frac{-3\sqrt{5}}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

$$A_{[ACB]} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) \times \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{9\sqrt{5}}{5} \times \frac{9}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{5}}{20}$$

A área do triângulo $[ACB]$ é $\frac{81\sqrt{5}}{20}$ u.a.

2. Opção (C)

(u_n) é uma progressão geométrica, logo $\frac{u_9}{u_5} = r^4$. Assim:

$$r^4 = \frac{13122}{162} \Leftrightarrow r^4 = 81 \Leftrightarrow r = -3 \vee r = 3$$

Como (u_n) é monótona, $r = 3$.

$$u_7 = u_5 \times r^2 \Leftrightarrow u_7 = 162 \times 3^2 = 1458$$

O sétimo termo da sucessão (u_n) é 1458.

3.

3.1 Opção (D)

Determinemos as coordenadas do ponto A:

$(2, y, z) = (1, 2, -4) + k(-1, 1, -3) \Leftrightarrow (2, y, z) = (1 - k, 2 + k, -4 - 3k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - k \\ y = 2 + k \\ z = -4 - 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 - 1 \\ z = -4 - 3 \times (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto A são $(2, 1, -1)$.

Pretende-se a equação de um plano paralelo ao plano α, logo terá de ser da forma:

$$3x + 2y + z + d = 0$$

Determinemos o valor de d, substituindo na equação anterior o x, o y e o z, respetivamente, pelas coordenadas do ponto A:

$$3 \times 2 + 2 \times 1 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

Conclui-se que a equação $3x + 2y + z - 7 = 0$ define o plano paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A.

3.2 Consideremos a reta perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto B. A interseção desta reta com o plano α é o ponto médio de $[BC]$. Designemos este ponto por I e determinemos as suas coordenadas.

A reta de equação $(x, y, z) = (4, 5, 12) + k(3, 2, 1), k \in \mathbb{R}$ é perpendicular ao plano α e passa pelo ponto B.

O ponto de coordenadas $(4 + 3k, 5 + 2k, 12 + k), k \in \mathbb{R}$ é um ponto desta reta.

Substituindo-as na equação do plano α, temos:

$3(4 + 3k) + 2(5 + 2k) + 12 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow 12 + 9k + 10 + 4k + k + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 14k = -28$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Desta forma, as coordenadas do ponto I são $(4 + 3 \times (-2), 5 + 2 \times (-2), 12 - 2) = (-2, 1, 10)$.

$\overline{BC} = 2 \times \overline{BI} = 2 \times \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 5)^2 + (10 - 12)^2} =$

$= 2 \times \sqrt{36 + 16 + 4} =$

$= 2 \times \sqrt{56} =$

$= 4\sqrt{14}$

4. $\frac{-1+7x}{x^2-3x+2} \geq \frac{-x+3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{-1+7x}{(x-1)(x-2)} + \frac{x-3}{x-2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1+7x+(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1+7x+x^2-3x-x+3}{(x-1)(x-2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -2 \vee -1 \leq x < 1 \vee x > 2$

Cálculos auxiliares

- $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{3\pm1}{2}$

  $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

- $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{-3\pm1}{2}$

  $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
x^2+3x+2	+	0	−	0	+	+	+	+	+
$(x-1)(x-2)$	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$\frac{x^2+3x+2}{(x-1)(x-2)}$	+	0	−	0	+	n.d.	−	n.d.	+

C.S. $=]-\infty, -2] \cup [-1, 1[\cup]2, +\infty[$

5. I – b); II – a); III – c); IV – b)

Efetuando a divisão inteira, obtemos:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-4} = 1 + \frac{3}{x-4}$$

o que nos permite concluir que o gráfico de f é uma hipérbole.

A reta de equação $x = 4$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

f é decrescente em $]-\infty, 4[$ e em $]4, +\infty[$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-4} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 4$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x-4 \\ \cline{2-2} -x+4 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \frac{3}{x-4}$

Assim, f é não negativa em $]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]1, 4]$.

Sendo g a função definida por $g(x) = f(x+a) + k$, com $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, significa que o gráfico de f sofreu uma translação associada ao vetor de coordenadas $(-3, -2)$ e, uma vez que as retas de equações $x = 1$ e $y = -1$ são assíntotas ao gráfico de g, então $a = 3$ e $k = -2$.

6.

6.1 Opção (D)

$$\lim x_n = \lim(n^2 - n) = \lim\left(n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= +\infty\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) =$$

$$= +\infty(1 - 0) =$$

$$= +\infty$$

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} =$$

$$= \frac{2}{1} =$$

$$= 2$$

6.2 $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ existe se $f(2) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

- $f(2) = k$
- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} =$$

$$= \frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3} =$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{2x^2-2x-4}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{(x-2)(2x+2)}{x(x-2)} =$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{2x+2}{x} =$$

$$= \frac{2\times2+2}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

Cálculo auxiliar

	2	−2	−4
2		4	4
	2	2	0

$2x^2 - 2x - 4 = (x-2)(2x+2)$

Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, concluímos que não existe nenhum valor de k para o qual exista $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

7. **Opção (C)**

Uma vez que se sabe que a reta tangente ao seu gráfico, no ponto de abcissa 5, tem inclinação $135°$, podemos concluir que $f'(5) = \text{tg } 135° \Leftrightarrow f'(5) = -1$.

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x^2-8x+15} = \lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{(x-5)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{1}{x-3}\times\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} =$$

$= \frac{1}{5-3}\times f'(5) =$ (pois f é diferenciável em 5)

$$= \frac{1}{2}\times(-1) =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Cálculo auxiliar

	1	-8	15
5		5	-15
	1	-3	0

$x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$

8.

8.1 $f'(-2) = \lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to-2}\frac{\frac{x^2-3x}{x+1}-f(-2)}{x-(-2)} =$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{\frac{x^2-3x}{x+1}-(-10)}{x-(-2)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{x^2-3x+10x+10}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{x^2+7x+10}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{x+5}{x+1} =$$

$$= \frac{-2+5}{-2+1} =$$

$$= -3$$

Cálculos auxiliares

- $f(-2) = \frac{(-2)^2-3(-2)}{-2+1} = -10$
-

	1	7	10
-2		-2	-10
	1	5	0

$x^2+7x+10 = (x+2)(x+5)$

8.2 Comecemos por determinar a abcissa do ponto P:

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x+1} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x+1}+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+x+1}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \land x+1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \land x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \land x \neq -1$$

O ponto P tem coordenadas $(1, -1)$.

A reta t tem declive $f'(-2) = -3$, pelo que $(-1, 3)$ são as coordenadas de um seu vetor diretor. Assim, uma equação vetorial da reta paralela à reta t e que passa no ponto P é:

$$(x, y) = (1, -1) + k(-1,3), k \in \mathbb{R}$$

9. Sabemos que a média do salário líquido dos 22 funcionários, com idade inferior a 30 anos, é 1400 euros, pelo que $22 \times 1400 = 30\,800$ corresponde à soma de todos os seus salários.

Seja x $(x > 0)$ o número de funcionários com, pelo menos, 30 anos. Da mesma forma, de acordo com os dados do enunciado, $2200x$ corresponde à soma de todos os seus salários.

Considerando que a média do salário líquido da totalidade dos funcionários que trabalham na empresa é 1848 euros, podemos concluir que:

$$\frac{30\,800 + 2200x}{22 + x} = 1848 \Leftrightarrow 30\,800 + 2200x = 1848 \times (22 + x)$$

$$\Leftrightarrow 30\,800 + 2200x = 40\,656 + 1848x$$

$$\Leftrightarrow 2200x - 1848x = 40\,656 - 30\,800$$

$$\Leftrightarrow 352x = 9856$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9856}{352}$$

$$\Leftrightarrow x = 28$$

O número de funcionários da empresa com, pelo menos, 30 anos é 28.

10. Inserindo na calculadora gráfica as listas com os dados apresentados, temos:

x	y
19	37
26	54
32	68
39	80
25	40
30	66
10	20

Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos os valores de a e de b, da equação da reta de regressão linear, com três casas decimais: $a \approx 2{,}174$ e $b \approx -4{,}059$

Desta forma, a equação da reta de regressão linear é $y = 2{,}174\,x - 4{,}059$.

Com base neste modelo, o número de livros vendidos na livraria, no dia em que o número de visitantes foi 35, com arredondamento às unidades, foi $y = 2{,}174 \times 35 - 4{,}059 \approx 72$.