TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1.

1.1 Opção (D)

Uma vez que se pretende uma equação vetorial de uma reta paralela ao plano ABC, podemos excluir as opções **(B)** e **(C)**, pois, em ambas, as equações vetoriais apresentam vetores colineares ao vetor de coordenadas $(-2,3,6)$, sendo este um vetor normal ao plano ABC.

Analisemos, agora, a posição relativa do vetor de coordenadas $(-2,3,6)$ com os vetores apresentados em cada uma das equações vetoriais nas opções **(A)** e **(D)**:

(A) $(-2,3,6).(3,-2,2) = -2\times 3 + 3\times(-2) + 6\times 2 = -6 - 6 + 12 = 0$

(D) $(-2,3,6).(3,-4,3) = -2\times 3 + 3\times(-4) + 6\times 3 = -6 - 12 + 18 = 0$

Em ambas as opções estão representadas equações vetoriais de retas paralelas ao plano ABC.

Verifiquemos se ponto F pertence à reta apresentada na opção **(A)**:

$$\begin{cases} 10 = 7 + 3k \\ 1 = -1 - 2k \\ 9 = 7 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3k \\ 2 = -2k \\ 2 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -1 = k \\ 1 = k \end{cases}$$

Como os valores de k obtidos não são iguais, conclui-se que o ponto F não pertence à reta apresentada na opção **(A)**.

Verifiquemos se ponto F pertence à reta apresentada na opção **(D)**:

$$\begin{cases} 10 = 7 + 3k \\ 1 = 5 - 4k \\ 9 = 6 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3k \\ -4 = -4k \\ 3 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 1 = k \\ 1 = k \end{cases}$$

Como os valores de k obtidos são iguais, conclui-se que o ponto F pertence à reta apresentada na opção **(D)**.

Desta forma, podemos concluir que a reta de equação apresentada na opção **(D)**,
$(x,y,z) = (7,5,6) + k(3,-4,3), k \in \mathbb{R}$ é paralela ao plano ABC e contém o ponto F.

1.2 Comecemos por escrever uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto F: $(x,y,z) = (10,1,9) + k(-2,3,6), k \in \mathbb{R}$

A interseção da reta AF com o plano ABC é o ponto A.

Da interseção da reta de equação $(x,y,z) = (10,1,9) + k(-2,3,6), k \in \mathbb{R}$ com o plano definido por ABC resulta o ponto A.

Um ponto genérico da reta é do tipo $(10-2k, 1+3k, 9+6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano, obtemos:

$$-2(10-2k) + 3(1+3k) + 6(9+6k) + 12 = 0 \Leftrightarrow -20 + 4k + 3 + 9k + 54 + 36k + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow 49k = -49$$
$$\Leftrightarrow k = -1$$

Para $k = -1$, obtemos as coordenadas do ponto A:

$\left(10 - 2 \times (-1), 1 + 3 \times (-1), 9 + 6 \times (-1)\right) = (12, -2, 3)$

$d_{(O,A)} = \sqrt{12^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 4 + 9} = \sqrt{157}$

2. Seja (a_n) a sucessão que representa a área do quadrado de ordem n.

Tem-se que $a_1 = 4^2 = 16$; $a_2 = 2^2 = 4$; $a_3 = 1^2 = 1$ …

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo 16.

Assim, a soma das áreas de n quadrados pode ser dada por $S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \times 16$ e, como $n \to +\infty$. tem-se:

$\lim S_n = \lim\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \times 16\right) = \frac{1-0}{\frac{3}{4}} \times 16 = \frac{64}{3}$

3. Opção (D)

$\lim(u_n) = \lim \frac{2n+5}{n+3} = \lim\left(2 - \frac{1}{n+3}\right) = 2^+$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{array}{rr|l} 2n & +5 & n+3 \\ \cline{3-3} -2n & -6 & 2 \\ \cline{1-2} & -1 & \end{array}$$

$$\frac{2n+5}{n+3} = 2 - \frac{1}{n+3}$$

4. Opção (B)

f é uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole, pelo que pode ser definida por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$,

sendo a, b e c números reais.

As retas de equações $x = 2$ e $y = 3$ são assíntotas ao gráfico da função f, pelo que $f(x) = 3 + \frac{b}{x-2}$.

O ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertence ao gráfico de f, logo:

$f(-1) = 2 \Leftrightarrow 3 + \dfrac{b}{-1-2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{-3} = -1 \Leftrightarrow b = 3$

Desta forma, $f(x) = 3 + \frac{3}{x-2} = \frac{3x-6+3}{x-2} = \frac{3x-3}{x-2}$

5.

5.1 $\frac{5x+4}{x-x^2} \leq f(x)$

$\Leftrightarrow \frac{5x+4}{x-x^2} \leq \frac{-x-2}{x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{5x+4}{-x(x-1)} - \frac{-x-2}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-5x-4}{x(x-1)} + \frac{x+2}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-5x-4+x(x+2)}{x(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-5x-4+x^2+2x}{x(x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{x(x-1)} \leq 0$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - 3x - 4 = 0$

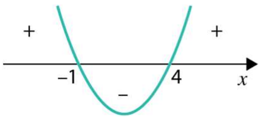
$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times1\times(-4)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pm5}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3+5}{2} \vee x = \frac{3-5}{2}$

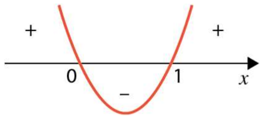
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$



$x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$



x	$-\infty$	-1		0		1		4	$+\infty$
x^2-3x-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-1)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-3x-4}{x(x-1)}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim,

$\frac{x^2-3x-4}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \vee 1 < x \leq 4$

C.S. = $[-1, 0[\cup]1, 4]$

5.2 $f'(3) = \lim_{x\to3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{\frac{-x-2}{x-1} - \frac{-3-2}{3-1}}{x-3} =$

$= \lim_{x\to3} \frac{\frac{-x-2}{x-1} - \frac{-5}{2}}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{\frac{-x-2}{x-1} + \frac{5}{2}}{x-3} =$

$= \lim_{x\to3} \frac{\frac{-2x-4+5x-5}{2(x-1)}}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{3x-9}{2(x-1)(x-3)} =$

$= \lim_{x\to3} \frac{3(x-3)}{2(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to3} \frac{3}{2(x-1)} =$

$= \frac{3}{2(3-1)} = \frac{3}{4}$

6. Existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ se $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$f(3) = -12$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-2x^2+18}{-x^2+7x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-2(x^2-9)}{(x-3)(-x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-2(x-3)(x+3)}{(x-3)(-x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-2(x+3)}{-x+4} =$$

$$= \frac{-2(3+3)}{-3+4} = -12$$

Cálculos auxiliares:

	-1	7	-12
3		-3	12
	-1	4	0

$-x^2 + 7x - 12 = (x-3)(-x+4)$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{12-4x}{\sqrt{2x+3}-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-4(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-4(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2x+3-9} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-4(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2x-6} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-4(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-4(\sqrt{2x+3}+3)}{2} =$$

$$= -2\left(\sqrt{2\times 3+3}+3\right) =$$

$$= -2(3+3) = -12$$

Logo, concluímos que existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ e que $\lim_{x\to 3} f(x) = -12$.

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+6x-1}{3-f(x)} = -2$

$\Leftrightarrow -\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+8)}{f(x)-3} = -2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+8)}{f(x)-3} = 2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} (x+8) \times \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = 2$

$\Leftrightarrow (2+8) \times \frac{1}{f'(2)} = 2$

$\Leftrightarrow f'(2) = 5$

Cálculos auxiliares:

	1	6	-16
2		2	16
	1	8	0

$x^2 + 6x - 16 = (x-2)(x+8)$

$f'(2) = 5$, logo o declive da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto A, é igual a 5, pelo que f é definida por $y = 5x + b$.

O ponto A tem coordenadas $(2, 3)$ e, substituindo-as, respetivamente, por x e por y na equação anterior, obtemos o valor de b:

$3 = 5 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -7$

Desta forma, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto A é $y = 5x - 7$.

Determinemos, agora, a abcissa do ponto de interseção da reta t com o eixo das abcissas:

$5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$

Assim, a abcissa do ponto de interseção da reta t com o eixo das abcissas é $\frac{7}{5}$.

8. Opção (A)

A média das alturas dos 15 jogadores em campo, de uma equipa de rugby, é 182 cm, pelo que a soma das suas alturas é igual $15 \times 182 = 2730$.

Retirando a 2730 o valor da medida do jogador que foi substituído, obtemos: $2730 - 182 = 2548$

Seja x a altura do jogador que entrou em campo para a substituição.

Desta forma:

$$\frac{2548 + x}{15} = 183 \Leftrightarrow 2548 + x = 2745 \Leftrightarrow x = 2745 - 2548 \Leftrightarrow x = 197$$

9. $a = \frac{20}{200} = 0{,}1$

$b = 0{,}275 \times 200 - 20 = 35$

$c = \frac{20+35+45+55}{200} = 0{,}775$

$d = (0{,}87 - 0{,}775) \times 200 = 19$

$e = (1 - 0{,}87) \times 200 = 26$

10. Opção (C)

$\bar{x} = \frac{1{,}81+ 2{,}05+ 1{,}45+2{,}78+4{,}12+ 1{,}70+ 2{,}08+ 2{,}18+ 4{,}14+ 3{,}01}{10} =$

$= \frac{25{,}32}{10} =$

$= 2{,}532$

Ordenemos todos os valores:

$$1{,}45;\ 1{,}70;\ 1{,}81;\ 2{,}05;\ 2{,}08;\ 2{,}18;\ 2{,}78;\ 3{,}01;\ 4{,}12;\ 4{,}14$$

Uma vez que o número de dados é par (são 10 dados), o percentil de ordem 50 é a média dos dois valores centrais (os quinto e sexto valores):

$$1{,}45;\ 1{,}70;\ 1{,}81;\ 2{,}05;\ 2{,}08;\ 2{,}18;\ 2{,}78;\ 3{,}01;\ 4{,}12;\ 4{,}14$$

Desta forma, $\frac{2{,}08 + 2{,}18}{2} = 2{,}13$.

11. Inserindo na calculadora gráfica as listas com os dados apresentados, temos:

x	y
7,38	29,36
7,71	30,99
8,32	33,78
8,32	35,12
8,16	34,10
8,20	34,26
8,32	34,81
8,76	36,11
9,01	36,27

Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos os valores de a e de b, da equação da reta de regressão linear, com quatro casas decimais:

$a \approx 4{,}4752$ e $b \approx -3{,}0187$

Desta forma, a equação da reta de regressão linear é $y = 4{,}4752\,x - 3{,}0187$.

Com base neste modelo, o perímetro cefálico de um feto cujo diâmetro biparietal medido na ecografia efetuada na $34.^{\text{a}}$ semana de gravidez é $8{,}42$ cm, com arredondamento às centésimas é:

$y = 4{,}4752\ \times 8{,}42 - 3{,}0187 = 34{,}66$.