

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Seja β a amplitude do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo das abcissas e o lado extremidade é a semirreta OA , de tal forma que $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($\beta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$).

Determinemos as coordenadas dos pontos relevantes em função de β :

$A(\cos \beta, \sin \beta)$; $B(\cos \beta, \tan \beta)$; $D(1, \tan \beta)$; $E(-\cos \beta, -\sin \beta)$; $F(0, -\sin \beta)$

A área da região colorida pode ser calculada pela diferença entre as áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[OFE]$.

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ABD]} &= \frac{(1 - \cos \beta) \times (\tan \beta - \sin \beta)}{2} = \frac{\tan \beta - \sin \beta - \cos \beta \times \tan \beta + \sin \beta \times \cos \beta}{2} = \\ &= \frac{\tan \beta - \sin \beta - \sin \beta + \sin \beta \times \cos \beta}{2} = \\ &= \frac{\tan \beta - 2 \sin \beta + \sin \beta \times \cos \beta}{2} \end{aligned}$$

$$A_{[OFE]} = \frac{-\cos \beta \times (-\sin \beta)}{2} = \frac{\sin \beta \times \cos \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{[ABD]} - A_{[OFE]} &= \frac{\tan \beta - 2 \sin \beta + \sin \beta \times \cos \beta}{2} - \frac{\sin \beta \times \cos \beta}{2} = \\ &= \frac{\tan \beta - 2 \sin \beta}{2} = \\ &= \frac{\tan \beta}{2} - \sin \beta = \\ &= \frac{\sin \beta}{2 \cos \beta} - \sin \beta \end{aligned}$$

Como se tem que $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{2 \cos \beta} - \sin \beta &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \\ &= \frac{\cos \alpha}{-2 \sin \alpha} - \cos \alpha = \\ &= -\frac{1}{2 \tan \alpha} - \cos \alpha \end{aligned}$$

2. A reta r tem inclinação $\frac{3\pi}{4}$, pelo que $m_r = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$.

Assim, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = -x + b$.

Como r interseja o eixo Ox no ponto abscissa 4, tem-se que $0 = -4 + b \Leftrightarrow b = 4$.

Desta forma, a equação reduzida da reta r é $y = -x + 4$.

Sejam $(x, 0)$ as coordenadas do ponto B . Tem-se que:

$$\overrightarrow{BD} = D - B = \left(0, \frac{5}{2}\right) - (x, 0) = \left(-x, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4, 0) - (x, 0) = (4 - x, 0)$$

Sabe-se que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 45$, pelo que:

$$\left(-x, \frac{5}{2}\right) \cdot (4-x, 0) = 45 \Leftrightarrow -4x + x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-45)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 9$$

O ponto B tem abcissa negativa, logo $x = -5$ e as suas coordenadas são $(-5, 0)$.

Determinemos, agora, o declive da reta s : $\frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{0 - \frac{5}{2}}{-5 - 0} = \frac{1}{2}$

Como a reta s interseca o eixo Oy no ponto D , de ordenada $\frac{5}{2}$, a equação reduzida da reta r é $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

A é o ponto de interseção das retas r e s , pelo que se tem:

$$-x + 4 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -2x + 8 = x + 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Substituindo x por 1 na equação da reta r , por exemplo:

$$y = -1 + 4 = 3$$

Assim, as coordenadas do ponto A são $(1, 3)$.

Seja α a amplitude do ângulo DAC .

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AD}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{18}}$$

$$\text{Assim, } \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{18}} \right) \approx 108^\circ.$$

Desta forma, a amplitude do ângulo DAC , com arredondamento às unidades, é 108° .

Cálculo auxiliar

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \left(0, \frac{5}{2}\right) - (1, 3) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4, 0) - (1, 3) = (3, -3)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cdot (3, -3) = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

3. Opção (C)

Sejam $(-2, 3, a)$ as coordenadas de um vetor diretor da reta r e $(b, -2, 4)$ as coordenadas de um vetor normal ao plano β .

Uma vez que a reta r é paralela ao plano β , tem-se que:

$$(-2, 3, a) \cdot (b, -2, 4) = 0 \Leftrightarrow -2b - 6 + 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - b - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a - 3$$

4. O ponto A pertence ao plano que contém a base do cone, pelo que:

$$a + 2 \times 3a - 2(2a + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow a + 6a - 4a - 2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a = 6$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Daqui se conclui que o ponto A tem coordenadas $(2, 6, 5)$.

Como a abcissa do vértice V é igual ao quádruplo da sua cota, podemos concluir que as coordenadas do vértice V são da forma $(4z, y, z)$.

Sejam $(1, 2, -2)$ as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a base do cone.

$$V = A + k(1, 2, -2), k \in \mathbb{R}$$

Desta forma, $(4z, y, z) = (2, 6, 5) + k(1, 2, -2) \Leftrightarrow (4z, y, z) = (2 + k, 6 + 2k, 5 - 2k)$, logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4z = 2 + k \\ y = 6 + 2k \\ z = 5 - 2k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(5 - 2k) = 2 + k \\ y = 6 + 2k \\ z = 5 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - 8k = 2 + k \\ y = 6 + 2k \\ z = 5 - 2k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9k = 18 \\ y = 6 + 2k \\ z = 5 - 2k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 6 + 2 \times 2 \\ z = 5 - 2 \times 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 10 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas do vértice V são $(4, 10, 1)$.

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (2, 6, 5) - (4, 10, 1) = (-2, -4, 4)$$

$$\|\overrightarrow{VA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Assim, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e que passa pelo vértice V é:

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 5)^2 = 36$$

5. Opção (C)

A opção (A) é falsa, pois:

$$\begin{aligned} u_{2025} - u_{2024} &= 3 - \cos\left(\frac{2025\pi}{6}\right) - \left(3 - \cos\left(\frac{2024\pi}{6}\right)\right) = \\ &= 3 - \cos\left(337\pi + \frac{3\pi}{6}\right) - 3 + \cos\left(337\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 0 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A opção (B) é falsa, pois:

$$u_1 = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = 3 - \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_{12} = 3 - \cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) = 3 - \cos(2\pi) = 3 - 1 = 2$$

$u_1 < u_2$ e $u_2 > u_{12}$, logo a sucessão (u_n) não é monótona.

A opção (C) é verdadeira, pois:

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 1$, pelo que, $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq 3 - \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 4$, logo a sucessão (u_n) é limitada.

A opção (D) é falsa, pois não existe $\lim\left(3 - \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$, logo a sucessão (u_n) não é convergente.

$$\begin{aligned} 6. \quad \begin{cases} 2u_8 = 3u_5 - 8 \\ u_{14} + u_{20} = 88 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u_1 + 7r) = 3(u_1 + 4r) - 8 \\ u_1 + 13r + u_1 + 19r = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 14r = 3u_1 + 12r - 8 \\ 2u_1 + 32r = 88 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2r + 8 \\ u_1 + 16r = 44 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2r + 8 \\ 2r + 8 + 16r = 44 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2r + 8 \\ 18r = 36 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \times 2 + 8 \\ r = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ r = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Termo geral da progressão aritmética: $u_n = 12 + (n - 1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 10$

Assim:

$$u_n = 68 \Leftrightarrow 2n + 10 = 68 \Leftrightarrow 2n = 58 \Leftrightarrow n = 29$$

$29 \in \mathbb{N}$, pelo que 68 é termo da progressão.

$$\begin{aligned} 7. \quad 2a + 6 - (a + 1) &= 6a + 2 - (2a + 6) \Leftrightarrow 2a + 6 - a - 1 = 6a + 2 - 2a - 6 \\ &\Leftrightarrow 3a = 9 \\ &\Leftrightarrow a = 3 \end{aligned}$$

Assim, $a + 1 = 4$, $2a + 6 = 12$ e $6a + 2 = 20$. Desta forma, $r = 12 - 4 = 8$.

Assim, a razão da progressão geométrica (v_n) é igual a $\frac{8}{4} = 2$.

Uma vez que a soma dos sete primeiros termos de (v_n) é 384, tem-se que:

$$S_7 = v_1 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} \Leftrightarrow 384 = v_1 \times 127 \Leftrightarrow v_1 = \frac{384}{127}$$

8. Opção (D)

$$\text{Opção (A): } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{n(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Opção (B): } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2})}{(n+2)(\sqrt{n+2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+2)(\sqrt{n+2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Opção (C): } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{Opção (D): } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2+1}{n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-4+\frac{1}{n^2})}{n(1+\frac{7}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-4+\frac{1}{n^2})}{1+\frac{7}{n}} = \frac{+\infty \times (-4)}{1} = -\infty$$

9. I – a); II – c); III – b); IV – c)

$$a_7 = \frac{14-3 \times 7}{2 \times 7+1} = -\frac{7}{15}$$

$$a_n = -\frac{46}{41} \Leftrightarrow \frac{14-3n}{2n+1} = -\frac{46}{41} \Leftrightarrow_{n \in \mathbb{N}} 41(14-3n) = -46(2n+1)$$

$$\Leftrightarrow 574 - 123n = -92n - 46$$

$$\Leftrightarrow 31n = 620$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{14-3(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{14-3n}{2n+1} = \frac{11-3n}{2n+3} - \frac{14-3n}{2n+1} = \\ &= \frac{(11-3n)(2n+1) - (14-3n)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \frac{22n+11-6n^2-3n-28n-42+6n^2+9n}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \frac{-31}{(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-31}{(2n+3)(2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)(2n+1) > 0, \text{ pelo que } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-31}{(2n+3)(2n+1)} < 0.$$

Desta forma, conclui-se que, como $a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então (a_n) é monótona decrescente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{a_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{14-3n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n-1}{14-3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-2-\frac{1}{n})}{n(\frac{14}{n}-3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2-\frac{1}{n}}{\frac{14}{n}-3} = \\ &= \frac{-2}{-3} = \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

A soma de todos os termos da progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{2}{3}$ é obtida por:

$$\lim \left(1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \lim \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1-0}{\frac{1}{3}} = 3$$

10. $\lim \left(\frac{u_n}{w_n} \right) = \frac{\lim(u_n)}{\lim(w_n)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

Cálculos auxiliares	
$\lim(u_n) = \lim(\sqrt{n^2 + 3} - n) =$ $= \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 3} + n)}{\sqrt{n^2 + 3} + n} =$ $= \lim \frac{n^2 + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3} + n} =$ $= \lim \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3} + n} =$ $= \frac{3}{+\infty} =$ $= 0$	$\lim(w_n) = \lim(5^{n+1} - 3^n) =$ $= \lim \left(5^n \left(5 - \frac{3^n}{5^n} \right) \right) =$ $= \lim \left(5^n \left(5 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right) \right) =$ $= +\infty(5 - 0) =$ $= +\infty$

11. Opção (B)

$$\begin{aligned} \lim(u_n) &= \lim \left(\frac{1+4n}{\sqrt{n^2+3}} \right) = \lim \frac{n \left(\frac{1}{n} + 4 \right)}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)}} = \\ &= \lim \frac{n \left(\frac{1}{n} + 4 \right)}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \lim \frac{\frac{1}{n} + 4}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = \\ &= \frac{0+4}{1} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim f(u_n) &= \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{12-3x}{x^2+x-20} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3}{x+5} = \\ &= -\frac{3}{9} = \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar			
$12 - 3x = -3(x - 4)$			
4	1	1	-20
		4	20
	1	5	0
$x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$			

12. $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{xf(x)} \geq 0$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$xf(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 3$$

x	$-\infty$	-2		0		1		3	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+	+	+	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{x^2-2x+1}{xf(x)}$	-	n. d.	-	n. d.	+	0	+	n. d.	-

Assim:

$$\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

$$\text{C.S.} =]0, 3[$$

13. Começemos por determinar analiticamente as coordenadas do ponto A:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+10}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \wedge x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq 2$$

O ponto A tem coordenadas (5, 0).

As coordenadas do ponto B, em função de b, são $(b, f(b))$.

$$\overline{AB} = 6, \text{ logo } \sqrt{(b-5)^2 + (f(b)-0)^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(b-5)^2 + (f(b))^2} = 6.$$

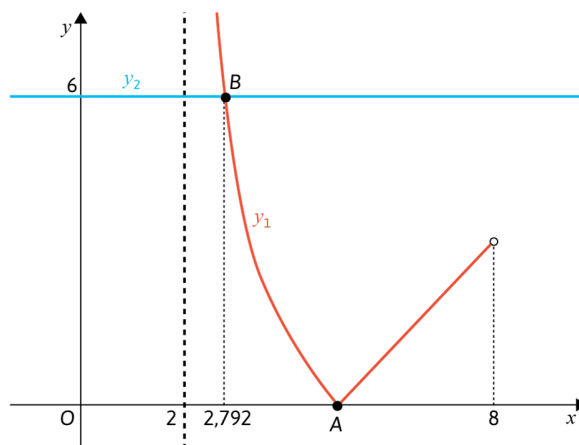
Utilizando x como variável independente:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (f(x))^2} = 6$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = \sqrt{(x-5)^2 + (f(x))^2}, \quad 2 < x < 6$$

$$y_2 = 6$$



Assim, o valor de b, arredondado às milésimas, é 2,792.