TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \ \lor \ \cos(x) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \ \lor \ \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \lor \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \lor \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$k = -1 \rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} - \pi \ \lor \ x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi \ \lor \ x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi$

$$x = -\frac{\pi}{2} \ \lor \ \underbrace{x = -\frac{4\pi}{3}}_{\notin [-\pi,\pi]} \ \lor \ \underbrace{x = -\frac{8\pi}{3}}_{\notin [-\pi,\pi]}$$

$k = 0 \rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} \ \lor \ x = \frac{2\pi}{3} \ \lor \ x = -\frac{2\pi}{3}$

$k = 1 \rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + \pi - \lor \ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \ \lor \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$

$$\underbrace{x = \frac{3\pi}{2}}_{\notin [-\pi,\pi]} \lor \underbrace{x = \frac{8\pi}{3}}_{\notin [-\pi,\pi]} \lor \underbrace{x = \frac{4\pi}{3}}_{\notin [-\pi,\pi]}$$

C.S. = $\left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

2. $h(\theta_1 + 2) = \frac{h(\theta_1)}{2}$

Utilizando x como variável independente:

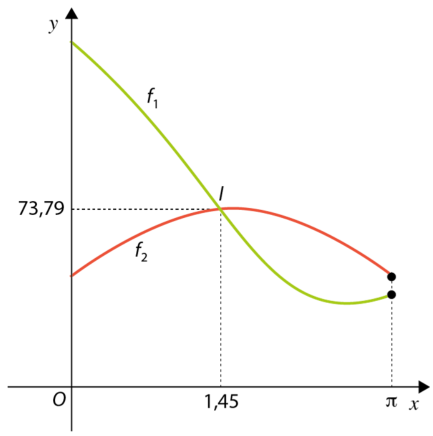
$$h(x+2) = \frac{h(x)}{2} \Leftrightarrow 91 + 57\,\text{sen}(x+2) = \frac{91 + 57\,\text{sen}(x)}{2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = 91 + 57\,\text{sen}(x+2)$

$f_2(x) = \frac{91+57\,\text{sen}(x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi$

O valor de θ_1 com aproximação às centésimas é $1{,}45$.



3.

3.1 Opção (B)

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo ao centro a que corresponde o arco de circunferência AB:

$$\alpha \times 5 = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\alpha$, logo:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 25 \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

3.2 Sendo $P(x, y)$ um qualquer ponto do plano pertencente à reta t, tem-se que:

$$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (-2, -4) = (x + 2, y + 4)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -1) - (-2, -4) = (4, 3)$

Assim:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AC} = 0 &\Leftrightarrow (x + 2, y + 4).(4, 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x + 2) + 3(y + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 8 + 3y + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3y = -4x - 20 \\ &\Leftrightarrow y = -\tfrac{4}{3}x - \tfrac{20}{3} \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta t é $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$.

3.3 Seja α a amplitude, em graus, do ângulo OCA, $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CO}\| \times \|\overrightarrow{CA}\|}$.

$\overrightarrow{CO} = O - C = (0, 0) - (2, -1) = (-2, 1)$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (-2, -4) - (2, -1) = (-4, -3)$

$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2, 1).(-4, -3) = 8 - 3 = 5$

$\|\overrightarrow{CO}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\|\overrightarrow{CA}\| = 5$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5} \times 5}$$

Assim, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\alpha \approx 63{,}4°$.

A amplitude do ângulo OCA, com aproximação às décimas do grau, é $63{,}4°$.

4.

4.1 Opção (B)

Comecemos por verificar em qual(is) opção(ões) se encontra a equação de um plano ao qual o ponto de coordenadas $(-1, 2, 1)$ pertence.

(A) $4 \times (-1) - 3 \times 2 + 11 = 0 \Leftrightarrow -4 - 6 + 11 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$

Falso, logo o ponto não pertence ao plano.

(B) $4 \times (-1) - 3 \times 2 + 5 \times 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow -4 - 6 + 5 + 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Verdadeiro, logo o ponto pertence ao plano.

(C) $3 \times (-1) + 4 \times 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow -3 + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Verdadeiro, logo o ponto pertence ao plano.

(D) $3 \times (-1) + 4 \times 2 + 5 \times 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow -3 + 8 + 5 + 5 = 0 \Leftrightarrow 15 = 0,$

Falso, logo o ponto não pertence ao plano.

De entre as opções (B) e (C), verifiquemos em qual delas se encontra a equação de um plano em que um vetor normal a esse plano é perpendicular ao vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$, de forma a garantir a perpendicularidade entre os planos.

(B) Um vetor normal a este plano é o vetor de coordenadas $(4, -3, 1)$.

$(4, -3, 5).(3, 4, 0) = 4 \times 3 - 3 \times 4 + 5 \times 0 = 12 - 12 + 0 = 0$

(C) Um vetor normal a este plano é o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$, logo este plano é paralelo ao plano ABC.

4.2 Comecemos por determinar uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano ABC e que contenha o ponto F:

$$3x + 4y + d = 0$$

Substituindo na equação do plano as coordenadas do ponto F, obtém-se:

$$3 \times 10 + 4 \times 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -62$$

Desta forma, uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano ABC, e que contém o ponto F, é:

$$3x + 4y - 62 = 0$$

Da interseção da reta de equação $(x, y, z) = (-10, 9, -1) + k(8, 1, 2), k \in \mathbb{R}$ com o plano definido por $3x + 4y - 62 = 0$ resulta o ponto H.

Assim, um ponto genérico da reta é do tipo $(-10 + 8k, 9 + k, -1 + 2k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano, obtemos:

$$3(-10 + 8k) + 4(9 + k) - 62 = 0 \Leftrightarrow -30 + 24k + 36 + 4k - 62$$
$$\Leftrightarrow 28k = 56$$
$$\Leftrightarrow k = 2$$

Para $k=2$, obtemos o ponto de coordenadas:

$(-10+8\times 2, 9+2, -1+2\times 2)=(6,11,3)$

Logo, as coordenadas do ponto H são $(6,11,3)$.

A pertence ao eixo Ox, logo as suas coordenadas são do tipo $(x,0,0)$.

Substituindo na equação do plano ABC:

$3x+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow x=4$

Assim, as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$.

Determinemos $\|\overrightarrow{AH}\|$, de modo a obtermos a medida do raio da superfície esférica de centro no ponto H e que passa no ponto A:

$\overrightarrow{AH}=H-A=(6,11,3)-(4,0,0)=(2,11,3)$

$\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{2^2+11^2+3^2}=\sqrt{134}$

Assim, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto H, e que passa no ponto A, é:

$$(x-6)^2+(y-11)^2+(z-3)^2=134$$

5. Opção (C)

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)+5}{n+1+1}=\frac{2n+2+5}{n+2}=\frac{2n+7}{n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n+7}{n+2}-\frac{2n+5}{n+1}=\frac{(2n+7)(n+1)-(2n+5)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$$

$$=\frac{2n^2+2n+7n+7-2n^2-4n-5n-10}{(n+2)(n+1)}=$$

$$=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}, \forall n\in\mathbb{N}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)>0$, pelo que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{-3}{(n+3)(n+2)}<0$.

Desta forma, conclui-se que, como $u_{n+1}-u_n<0, \forall n\in\mathbb{N}$, então (u_n) é monótona decrescente.

$$u_n=\frac{2n+5}{n+1}=2+\frac{3}{n+1}$$

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1 \Leftrightarrow n+1\geq 2,$ pelo que:

$$0<\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{3}{n+1}\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2<2+\frac{3}{n+1}\leq 2+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2<2+\frac{3}{n+1}\leq\frac{7}{2}$$

Desta forma, conclui-se que $\forall n\in\mathbb{N}$, $2<u_n\leq\frac{7}{2}$.

6. Tendo em consideração os dados do enunciado, podemos concluir que os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 3 e a razão é 2.

Pretende-se o comprimento do $15.^{\text{º}}$ segmento de reta posicionado na vertical, o que corresponde ao termo de ordem 30.

Desta forma:

$u_{30} = 3 + (30-1) \times 2 = 3 + 58 = 61$

O comprimento do $15.^{\text{º}}$ segmento de reta, posicionado na vertical, é 61 cm.

7. $2u_n - 3u_{n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, logo $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, de onde se conclui que $\frac{2}{3}$ é razão da progressão.

$$u_2 \times u_4 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow u_2 \times u_2 \times r^2 = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow (u_2)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow (u_2)^2 = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}}$$

$$\Leftrightarrow (u_2)^2 = 4$$

Como os termos da progressão são positivos, então $u_2 = 2$.

Assim, o termo geral da progressão pode ser dado por $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

Como se pretende que o termo geral da progressão seja dado na forma $a \times b^n$, em que a e b são números reais, então:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$$

$$= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \times \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{9}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

8. Opção (A)

$$\lim u_n = \lim \frac{2-6\text{n}}{3n} =$$

$$= \lim\left(\frac{2}{3n} - \frac{6\text{n}}{3n}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{2}{3n} - 2\right) =$$

$$= -2^+$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = -6.$$

9. $\lim(u_n) - \lim(v_n) = \lim \frac{\pi^n + 2^{n+\pi}}{\pi^{2n} + 3} - \lim\left(2n - \sqrt{4n^2 + 3n}\right) = 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Cálculos auxiliares

$$\lim \frac{\pi^n + 2^{n+\pi}}{\pi^{2n} + 3} = \lim \frac{\pi^n \times \left(1 + \frac{2^n \times 2^\pi}{\pi^n}\right)}{\pi^{2n} \times \left(1 + \frac{3}{\pi^{2n}}\right)} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \times 2^\pi}{\pi^n \times \left(1 + \frac{3}{\pi^{2n}}\right)} =$$

$$= \frac{1 + 0 \times 2^\pi}{+\infty \times \left(1 + \frac{3}{+\infty}\right)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty \times (1 + 0)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

$$\lim\left(2n - \sqrt{4n^2 + 3n}\right) = \lim \frac{\left(2n - \sqrt{4n^2 + 3n}\right)\left(2n + \sqrt{4n^2 + 3n}\right)}{2n + \sqrt{4n^2 + 3n}} =$$

$$= \lim \frac{4n^2 - 4n^2 - 3n}{2n + \sqrt{4n^2 + 3n}} = \lim \frac{-3n}{2n + \sqrt{4n^2 + 3n}} =$$

$$= \lim \frac{-3n}{2n + \sqrt{n^2\left(4 + \frac{3}{n}\right)}} = \lim \frac{-3n}{2n + n\sqrt{4 + \frac{3}{n}}} =$$

$$= \lim \frac{-3n}{n \times \left(2 + \sqrt{4 + \frac{3}{n}}\right)} = \lim \frac{-3}{2 + \sqrt{4 + \frac{3}{n}}} =$$

$$= \frac{-3}{2 + \sqrt{4 + \frac{3}{+\infty}}} = \frac{-3}{2 + \sqrt{4 + 0}} =$$

$$= \frac{-3}{2 + 2} = \frac{-3}{4}$$

10. Opção (D)

O gráfico da função f é uma hipérbole, pelo que a sua expressão analítica poderá ser do tipo:

$$f(x) = a + \frac{b}{x - c}, a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

Como as retas de equação $x = -4$ e $y = -3$ são as assíntotas do gráfico da função f, podemos concluir que $a = -3$ e $c = -4$, de onde resulta que $f(x) = -3 + \frac{b}{x-(-4)} = -3 + \frac{b}{x+4}$.

Uma vez que o gráfico da função f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada $-\frac{7}{4}$:

$$f(0) = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{0 + 4} = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{b}{4} = -\frac{7}{4} + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow b = 5$$

Desta forma, uma expressão analítica da função f é $f(x) = -3 + \frac{5}{x+4}$.