Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____________________________________ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item. As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = (n-2020)^2 \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad n < 2020 \\ \cos(n\pi) & \text{se} \quad n \geq 2020 \end{cases}$$

Em relação a estas sucessões, podemos concluir que:

(A) são ambas monótonas.

(B) são ambas limitadas.

(C) (u_n) é monótona e não limitada.

(D) (v_n) é não monótona e limitada.

2. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = 3\cos(2x)$ e $g(x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + a\cos(x)$, onde a é um número real superior a 1.

2.1. A função f é uma função periódica de período:

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** π

2.2. Qual é o contradomínio da função g, para qualquer valor de a?

(A) $[a-1, \; a+1]$ **(B)** $[1-a, \; a-1]$ **(C)** $[-a, a]$ **(D)** $\left[-\frac{a}{2}, \; \frac{a}{2}\right]$

2.3. Considerando $a = 4$ e recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

2.4. Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f representado no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e um triângulo $[OAP]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e P são pontos do gráfico de f;
- o ponto A tem abcissa positiva e esta é o zero da função f no intervalo considerado;
- P é um ponto do gráfico da função f e pertence ao segundo quadrante.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, as coordenadas do ponto P, de modo que a área do triângulo $[OAP]$ seja igual a $\frac{1}{2}$.

Na sua resposta deve:

- determinar analiticamente as coordenadas do ponto A;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto P, com arredondamento às centésimas.

3. Num referencial o.n. Oxy do plano, considere:

- a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$;
- a reta t tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(3, 4)$.

Seja α a inclinação da reta t.

Determine, sem recurso à calculadora, o valor de $\cos \alpha$.

4. O limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ é:

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$;
- o ponto A de coordenadas $A(1, 2, 3)$ pertencente a essa superfície esférica.

Recorrendo a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

5.1. Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

5.1.1. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Se P pertencer ao plano mediador de $[AB]$, então necessariamente:

(A) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PM} = 0$ **(B)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PM} = 0$

(C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB} = 0$ **(D)** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AP} = 0$

5.1.2. Determine a amplitude do ângulo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

5.1.3. Determine uma equação cartesiana do plano OAB.

5.2. Seja α o plano definido por:

$$2x - 3y + 11 = 0$$

Sabe-se que o plano α é tangente à superfície esférica.

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

6. Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética, da qual se sabe que a soma dos quatro primeiros termos é igual a 46 e que a diferença entre o oitavo termo e o quinto termo é igual a 9.

7. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{4n^3+n^2-1}{-2n^3+n} \quad \text{e} \quad b_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

Seja $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$.

Determine o valor de $A + B$.

- FIM -

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.**	**5.1.1.**	**5.1.2.**	**5.1.3.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	
8	8	8	20	20	20	8	8	20	20	20	20	20	**200**