

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

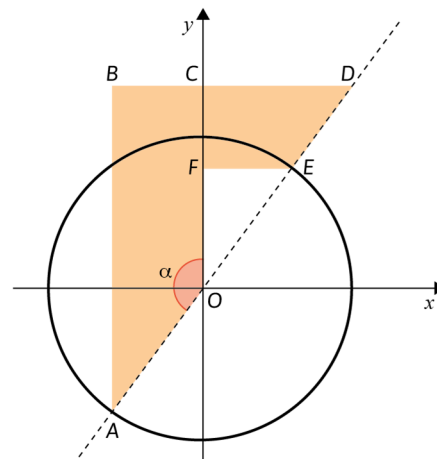
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica e uma região colorida composta pelos trapézios $[OABC]$ e $[CDEF]$, retângulos em B e em C , respetivamente.

Sabe-se que:

- A e E são pontos da circunferência e pertencem à reta OD ;
- os pontos C e F têm ambos abcissa nula e a mesma ordenada que os pontos D e E , respetivamente;
- o ponto B tem a mesma abcissa que A e a mesma ordenada que o ponto D ;
- o ponto D tem abcissa igual a 1;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo FOA ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$).

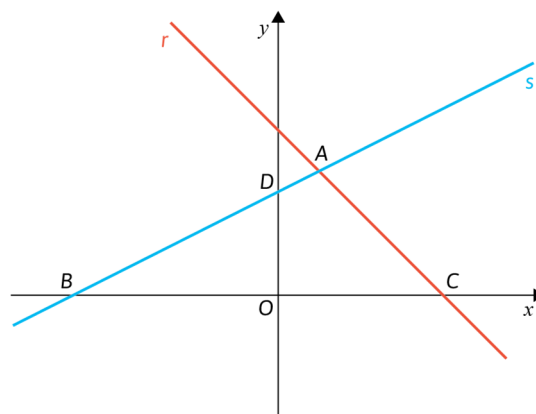


Prove que a área da região colorida é dada, em função de α , por $-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \cos \alpha$.

2. No referencial o.n. Oxy da figura encontram-se representadas duas retas, r e s .

Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção das retas r e s ;
- B pertence à reta s , tem abcissa negativa e ordenada nula;
- r tem inclinação $\frac{3\pi}{4}$ e intersesta o eixo Ox no ponto C , de abcissa 4;
- s intersesta o eixo Oy no ponto D , de ordenada $\frac{5}{2}$;
- $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 45$.



Determine a amplitude do ângulo DAC .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3. Sejam a e b dois números reais, não nulos.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r e o plano β definidos, respetivamente, por:

$$r: (x, y, z) = (5, -6, 2) + k(-2, 3, a), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta: bx - 2y + 4z - 13 = 0$$

Sabe-se que a reta r é paralela ao plano β .

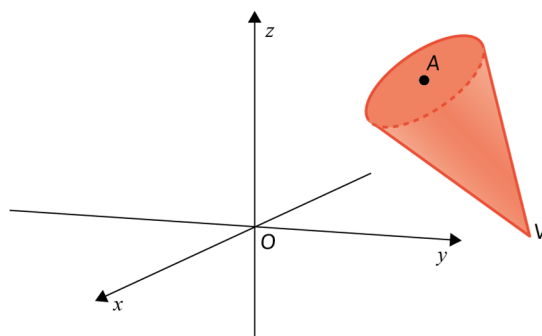
Qual das condições seguintes corresponde a uma relação válida para quaisquer valores de a e de b , não nulos?

- (A) $a = 2b + 3$ (B) $b = 3 - 2a$ (C) $b = 2a - 3$ (D) $a = 3 - 2b$

4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cone reto de vértice V e base de centro no ponto A .

Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano definido pela equação $x + 2y - 2z - 4 = 0$;
- o ponto A tem coordenadas $(a, 3a, 2a + 1)$, $a \in \mathbb{R}$;
- a abscissa do vértice V é o quádruplo da sua cota.



Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e que passa pelo vértice V .

5. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 3 - \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $u_{2025} - u_{2024} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (B) A sucessão (u_n) é monótona.
- (C) A sucessão (u_n) é limitada.
- (D) A sucessão (u_n) é convergente.

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que:

- $2u_8 = 3u_5 - 8$
- $u_{14} + u_{20} = 88$

Averigue, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, se 68 é termo da progressão.

7. Para um certo valor real a , sabe-se que $a + 1$, $2a + 6$ e $6a + 2$ são três termos consecutivos de uma progressão aritmética (u_n) de razão r , onde $a + 1$ é o termo de menor ordem.

Seja (v_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que:

- a razão de (v_n) é igual a $\frac{r}{4}$;
- a soma dos sete primeiros termos de (v_n) é 384.

Determine v_1 .

8. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

Qual das expressões seguintes não pode ser o termo geral de (u_n) ?

(A) $\frac{2n+3}{n^2+1}$

(B) $\frac{\sqrt{n+2}}{n+2}$

(C) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$

(D) $\frac{-4n^2+1}{n+7}$

9. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{14-3n}{2n+1}$.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde.

Cada espaço corresponde a uma só opção.

O termo de ordem 7 de (a_n) é I e $-\frac{46}{41}$ é o termo de ordem II.

No que diz respeito à monotonia de (a_n) , a sucessão é III.

Considere $\lim \left(\frac{-1}{a_n}\right) = r$. Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de primeiro termo 1.

A soma de todos os termos desta progressão geométrica é IV.

I	II	III	IV
a) $-\frac{7}{15}$	a) 26	a) monótona crescente	a) 0
b) $\frac{17}{15}$	b) 21	b) monótona decrescente	b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{11}{15}$	c) 20	c) não monótona	c) 3

10. Considere as sucessões (u_n) e (w_n) , definidas por:

$$u_n = \sqrt{n^2 + 3} - n \quad \text{e} \quad w_n = 5^{n+1} - 3^n$$

Resolva o item seguinte, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

Determine $\lim \left(\frac{u_n}{w_n}\right)$.

11. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{1+4n}{\sqrt{n^2+3}}$.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-5, 4\}$, definida por $f(x) = \frac{12-3x}{x^2+x-20}$.

O $\lim f(u_n)$ é igual a:

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 3

(D) 4

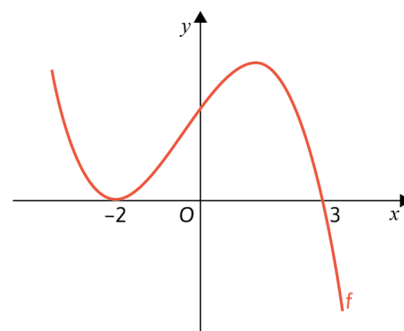
12. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f , de terceiro grau e de domínio $\mathbb{R}$. A função f tem dois zeros, -2 e 3 .

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o conjunto-solução da inequação $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de união de intervalos de números reais.



13. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $f(x) = \frac{-2x+10}{x-2}$.

Seja A o ponto do gráfico da função f de ordenada nula.

Considere que um ponto B se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função f .

Seja b ($2 < b < 8$) a abscissa do ponto B .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de b para o qual $\overline{AB} = 6$, sabendo que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- determine analiticamente as coordenadas do ponto A ;
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de b arredondado às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	Total
20	20	10	20	10	18	18	10	10	18	10	18	18	200