

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x) \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} + x \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right)$$

1.1. Prove que $f(x) = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$.

1.2. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, os valores de x que satisfazem a condição $f(x) = 2\cos^3 x$.

1.3. No intervalo $[0, \pi]$, o gráfico da função f tem um ponto A , cuja distância à origem é igual a 2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine as coordenadas do ponto A , apresentando os valores aproximados às centésimas.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto A , com a aproximação pedida.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Considere, num referencial o.n. xOy , uma reta r de inclinação α .

Sabe-se que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$.

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x$

(B) $y = 2\sqrt{2}x$

(C) $y = -\sqrt{3}x$

(D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

3. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Sejam:

- A o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas;
- B o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das ordenadas;
- r a reta tangente à circunferência no ponto A ;
- s a reta tangente à circunferência no ponto B ;
- C o ponto de interseção das retas r e s .

Determine o valor exato da área do trapézio $[OACB]$.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 4$$

Seja C o centro da superfície esférica.

4.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular ao plano xOy e que passa no ponto C ?

(A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, -2, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + k(0, 0, -1), k \in \mathbb{R}$

4.2. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa negativa, ordenada 3 e cota 1.

Determine uma equação do plano que é tangente à superfície esférica no ponto P .

4.3. Seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOz . Determine a amplitude do ângulo AOC . Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2022}$$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) (u_n) é monótona.

(B) (u_n) não é limitada.

(C) (u_n) é convergente para 0.

(D) $\lim u_n = +\infty$

6. O limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ é:

(A) $+\infty$

(B) 0

(C) $\sqrt{2} + 2$

(D) $\sqrt{2} - 1$

7. Sabe-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

Mostre que a sucessão definida por $v_n = 10^{2u_n}$ é uma progressão geométrica e indique a razão.

8. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{6n^3 + 2n^2 - 1}{n - 2n^3} \quad \text{e} \quad b_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

Seja $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $A \times B = +\infty$

(B) $A \times B = -\infty$

(C) $\frac{A}{B} = +\infty$

(D) $\frac{B}{A} = 0$

- FIM -

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1	1.2.	1.3.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.	7.	8.	
20	20	25	10	25	10	20	20	10	10	20	10	200