TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

- Em relação à sucessão (u_n), sabemos que é não monótona:

$u_{2019} = (2019 - 2020)^2 = (-1)^2 = 1$

$u_{2020} = (2020 - 2020)^2 = 0$

$u_{2021} = (2021 - 2020)^2 = 1$

$u_{2019} > u_{2020}$ e $u_{2020} < u_{2021}$

A sucessão (u_n) é não limitada, pois não existe nenhum número real b tal que $u_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ (observe-se que (u_n) é a restrição ao conjunto $\mathbb{N}$ da função real de variável real f definida por $f(x) = (x - 2020)^2$).

- Em relação à sucessão (v_n), sabemos que também é não monótona:

$u_{2020} = \cos(2020\pi) = 1$

$u_{2021} = \cos(2021\pi) = -1$

$u_{2022} = \cos(2022\pi) = 1$

$u_{2020} > u_{2021}$ e $u_{2021} < u_{2022}$

A sucessão (v_n) é limitada, pois existem dois números reais a e b tais que $a \leq v_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, $a = -1$ e $b = 2019$, já que os primeiros 2019 termos da sucessão são os primeiros 2019 números naturais e, a partir do termo de ordem 2020, a sucessão varia apenas entre -1 e 1.

2.

2.1. Opção (D)

Para que o número real P seja período de f, terá que se verificar $f(x+P) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $P = \frac{\pi}{3}$:

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \neq f(x)$$

- Se $P = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\cos(2x + \pi) = -3\cos(2x) \neq f(x)$$

- Se $P = \frac{2\pi}{3}$:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 3\cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \neq f(x)$$

- Se $P = \pi$:

$f(x + \pi) = 3\cos\big(2(x + \pi)\big) = 3\cos(2x + 2\pi) = 3\cos(2x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, logo f é periódica de período π.

2.2. Opção (B)

$$g(x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + a\cos x = -\cos x + a\cos x =$$

$$= (a-1)\cos x, \quad \text{com } a > 1$$

$$-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-(a-1) \le (a-1)\cos x \le a-1, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a > 1$$

$$-a+1 \le g(x) \le a-1$$

$$D'_g = [1-a, a-1]$$

2.3. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x)$:

$$3\cos(2x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\cos(x) \Leftrightarrow 3\cos(2x) = -\cos x + 4\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos(2x) = 3\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \ \vee \ 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \ \vee \ 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

2.4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$

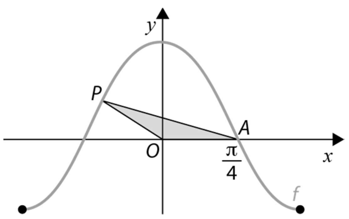
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = \frac{\pi}{4}$, já que $x > 0$.

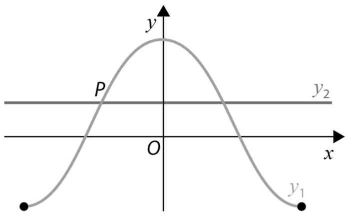
Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Pretende-se as coordenadas de um ponto P do gráfico de f que pertença ao 2.º quadrante e tal que $\frac{\frac{\pi}{4} \times f(x)}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{\pi}$.



$P(x, f(x))$

$A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$



$$y_1 = 3\cos(2x)$$

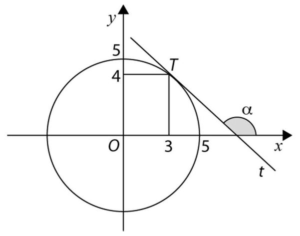
$$y_2 = \frac{4}{\pi}$$

As coordenadas do ponto P são $(-0{,}57; 1{,}27)$.

3.

3.1. Seja m_t o declive da reta t e α a sua inclinação. Como t é tangente à circunferência de centro (0,0) no ponto T de coordenadas (3,4), então $m_t = -\frac{1}{m_{OT}} = -\frac{3}{4}$.

Cálculo auxiliar



$$m_{OT} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

Como $m_t = \operatorname{tg}\alpha$, então $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Como $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, tem-se que:

$$1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como α é a inclinação da reta e $\operatorname{tg}\alpha < 0$, então $90° < \alpha < 180°$ e, como tal, $\cos\alpha < 0$, isto é, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

4. Opção (A)

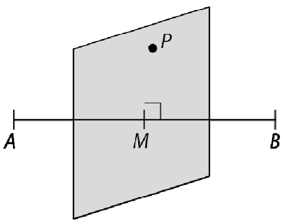
$$\lim u_n = \lim \underbrace{\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right)}_{\substack{\text{Soma de } n \text{ termos de uma progressão} \\ \text{geométrica de razão } \frac{1}{5} \text{ e 1.º termo 1.}}} = \lim\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} \times 1\right) = \frac{1-0}{\frac{4}{5}} \times 1 = \frac{5}{4}$$

5.

5.1.

5.1.1. Opção (B)

Se P pertencer ao plano mediador de $[AB]$, então sabemos que $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0$, pois o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é um plano perpendicular a $[AB]$ e que passa pelo médio de $[AB]$.



5.1.2. O ponto B pertence ao semieixo negativo das ordenadas, logo as coordenadas de B são da forma $(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}^-$.

Como também pertence à superfície esférica de equação $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$, tem-se que:

$(0-1)^2 + y^2 + 0^2 = 13 \Leftrightarrow y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{12}$

Logo, $B\left(0, -\sqrt{12}, 0\right)$.

$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 3)$ e $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{OB} = B - O = (0, -\sqrt{12}, 0)$ e $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{12})^2 + 0^2} = \sqrt{12}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(A\hat{O}B)$

$(1, 2, 3).(0, -\sqrt{12}, 0) = \sqrt{14} \times \sqrt{12} \times \cos(A\hat{O}B) \Leftrightarrow 0 - 2\sqrt{12} + 0 = \sqrt{14} \times \sqrt{12} \times \cos(A\hat{O}B)$

$\Leftrightarrow \cos(A\hat{O}B) = \frac{-2\sqrt{12}}{\sqrt{14}\times\sqrt{12}}$

Assim, $A\hat{O}B \approx 122{,}3°$.

5.1.3. $A(1, 2, 3)$ $\quad B(0, -\sqrt{12}, 0)$ $\quad O(0, 0, 0)$

Seja $\vec{n}$ um vetor normal ao plano OAB.

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{OA} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c).(1,2,3) = 0 \\ (a, b, c).(0, -\sqrt{12}, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -\sqrt{12}b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = 0 \end{cases}$$

Seja $c = 1$, por exemplo. Então, $\vec{n}(-3,0,1)$.

O plano OAB é, então, da forma $-3x + 0y + z + d = 0, d \in \mathbb{R}$.

Como $O(0, 0, 0)$ pertence ao plano, tem-se que:

$$0 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Assim, uma equação cartesiana do plano OAB é $-3x + z = 0$.

5.2. Seja I o ponto de tangência. Assim, I é o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo centro $C(1, 0, 0)$ da superfície esférica.

Equação vetorial da reta CI: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(2, -3, 0), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $(1 + 2k, -3k, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α, terá que se verificar:

$2(1 + 2k) - 3(-3k) + 11 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4k + 9k + 11 = 0$

$\Leftrightarrow 13k = -13$

$\Leftrightarrow k = -1$

Assim, o ponto I tem coordenadas $(1 + 2 \times (-1), -3 \times (-1), 0) = (-1, 3, 0)$.

6. Seja (a_n) a progressão aritmética, da qual se pretende determinar a_1.

Seja S_4 a soma dos quatro primeiros termos:

$S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \times 4 \Leftrightarrow 46 = (a_1 + a_4) \times 2 \Leftrightarrow a_1 + a_4 = 23$

$\Leftrightarrow a_1 + (a_1 + 3r) = 23$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 3r = 23$

Como $a_8 - a_5 = 9$, vem que:

$(a_5 + 3r) - a_5 = 9 \Leftrightarrow 3r = 9 \Leftrightarrow r = 3$

Assim:

$2a_1 + 3r = 23 \Leftrightarrow 2a_1 + 3 \times 3 = 23 \Leftrightarrow 2a_1 = 14$

$\Leftrightarrow a_1 = 7$

7. $A = \lim a_n \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{4n^3+n^2-1}{-2n^3+n} = \lim \frac{4n^3\left(1+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^3}\right)}{-2n^3\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$

$= \lim \frac{4\left(1+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n^3}\right)}{-2\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} =$

$= \lim \frac{4\times(1+0-0)}{-2\times(1-0)} =$

$= -2$

$B = \lim b_n = \lim \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \overset{(+\infty-\infty)}{\cong} \lim \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$

$= \lim \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \lim \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \frac{1}{+\infty+\infty} =$

$= \frac{1}{+\infty} =$

$= 0$

Assim, $A + B = -2 + 0 = -2$.