TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Seja α a amplitude do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo das abcissas e o lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$.

P pertence ao 3.º quadrante, logo $180° < \alpha < 270°$.

P pertence à circunferência de centro na origem e raio 4, pelo que a sua abcissa, em função de α, é $4\cos\alpha$.

Uma vez que a abcissa do ponto P é -2, então:

$4\cos\alpha = -2 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

Desta forma, $\alpha = 240°$.

O ponto B é obtido a partir do ponto P por uma rotação de centro no ponto O e amplitude $90°$, logo as suas coordenadas, em função de α, são $\left(4\cos(\alpha+90°), 4\operatorname{sen}(\alpha+90°)\right)$, isto é, $(-4\operatorname{sen}\alpha, 4\cos\alpha)$.

Como $\alpha = 240°$, B tem coordenadas $(-4\operatorname{sen}240°, 4\cos 240°) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}, 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$.

Determinemos, agora, a área do triângulo $[OAB]$:

$$\frac{4\times|-2|}{2} = 4$$

2. Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A e B, pontos de interseção dos gráficos de f e de g:

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2(-x) + 4 = 7\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + 4 = 7\operatorname{sen} x + 1\\
&\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x + 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \tfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \tfrac{7\pm5}{4}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x = 3}_{\text{equação impossível}} \ \vee\ \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ x = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$, logo $x = \frac{\pi}{6}\ \vee\ x = \frac{5\pi}{6}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\operatorname{sen}^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 4 = 2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 = \dfrac{9}{2}$

As coordenadas dos pontos A e B são $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{9}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{9}{2}\right)$, respetivamente.

Determinemos, agora, as coordenadas dos pontos C e D.

O argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π.

O contradomínio da função definida por $y = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ é $[-1, 1]$.

Assim, $\forall x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$:

$$-1 \leq \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq 7\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 7$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq 7\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \leq 8$$

Uma vez que os pontos C e D são pontos do gráfico de g cuja ordenada é mínima, concluímos que ambos têm ordenada -6.

$$g(x) = -6 \Leftrightarrow 7\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -6$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$, logo $x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$.

As coordenadas dos pontos C e D são $\left(-\frac{\pi}{2}, -6\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, -6\right)$, respetivamente.

Desta forma, a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a:

$$\frac{\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \times \left(\frac{9}{2} + 6\right) = \frac{2\pi + \frac{2\pi}{3}}{2} \times \frac{21}{2} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \times \frac{21}{2} =$$

$$= 14\pi$$

3.

3.1 Opção (C)

Seja α a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \sqrt{40} \times \sqrt{40} \times \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 40\cos\alpha$$

A área da região colorida é $\frac{40\pi}{3}$, logo $\frac{\alpha \times \left(\sqrt{40}\right)^2}{2} = \frac{40\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Assim:

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 40\cos\alpha = 40\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 40 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -20$$

3.2 $\text{sen}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\beta$

O ponto C, centro da circunferência, tem coordenadas $(2,4)$.

D é um ponto da circunferência e tem ordenada igual à abcissa do ponto C, isto é, a sua ordenada é 2.

Determinemos a abcissa do ponto D:

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2+(2-4)^2=40 &\Leftrightarrow (x-2)^2+4=40\\
&\Leftrightarrow (x-2)^2=36\\
&\Leftrightarrow x-2=-6 \ \vee\ x-2=6\\
&\Leftrightarrow x=-4 \ \vee\ x=8
\end{aligned}
$$

O ponto D tem abcissa negativa, logo as suas coordenadas são $(-4,2)$.

$\overrightarrow{CD}=D-C=(-4,2)-(2,4)=(-6,-2)$

O declive da reta CD é igual a $\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$.

A reta t é perpendicular à reta CD, pelo que o seu declive é $\frac{-1}{\frac{1}{3}}=-3$.

Sendo β a inclinação da reta t, tem-se que $\text{tg}\,\beta=-3$.

$$
\begin{aligned}
\text{tg}^2\,\beta+1=\frac{1}{\cos^2\beta} &\Leftrightarrow (-3)^2+1=\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&\Leftrightarrow 10=\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&\Leftrightarrow \cos^2\beta=\frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Como $\text{tg}\,\beta<0$ e $\beta\in[0,\pi[$, então $\cos\beta<0$, pelo que $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Logo, $\text{sen}\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

4.

4.1 O ponto R pertence ao plano α, tem cota nula e a abcissa é simétrica da sua ordenada, logo as suas coordenadas são do tipo $(-y,y,0)$.

Uma vez que R pertence ao plano α, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
2y+6y+3\times 0-8=0 &\Leftrightarrow 8y=8\\
&\Leftrightarrow y=1
\end{aligned}
$$

Assim, o ponto R tem coordenadas $(-1,1,0)$.

Seja M o ponto médio de $[RC]$.

As coordenadas de M são $\left(\frac{-1+6}{2},\frac{1+10}{2},\frac{0+3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Seja P um qualquer ponto de coordenadas (x,y,z) pertencente ao plano mediador de $[RC]$.

Tem-se que:

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{RC}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2},y-\frac{11}{2},z-\frac{3}{2}\right).(6-(-1),10-1,3-0)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2},y-\frac{11}{2},z-\frac{3}{2}\right).(7,9,3)=0$$

$$\Leftrightarrow 7\left(x-\frac{5}{2}\right)+9\left(y-\frac{11}{2}\right)+3\left(z-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-\frac{35}{2}+9y-\frac{99}{2}+3z-\frac{9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 7x+9y+3z-\frac{143}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 14x+18y+6z-143=0$$

4.2 Opção (D)

Uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano α é da forma $-2x+6y+3z+d=0$, com $d\in\mathbb{R}$.

O ponto de coordenadas $(1,-3,5)$ pertence ao plano, logo:

$-2\times 1+6\times(-3)+3\times 5+d=0 \Leftrightarrow -2-18+15+d=0 \Leftrightarrow d=5$

Assim, uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano α e que passa no ponto de coordenadas $(1,-3,5)$ é $-2x+6y+3z+5=0$.

4.3 Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A.

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que contém o centro da superfície esférica é $(x,y,z)=(6,10,3)+k(-2,6,3), k\in\mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico desta reta é da forma $(6-2k,10+6k,3+3k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta na equação do plano α, obtém-se:

$$-2(6-2k)+6(10+6k)+3(3+3k)-8=0 \Leftrightarrow -12+4k+60+36k+9+9k-8=0$$

$$\Leftrightarrow 49k=-49$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

Assim, $A\big(6-2\times(-1),10+6\times(-1),3+3\times(-1)\big)$, ou seja, $A(8,4,0)$.

$[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica, logo $B=A+2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}=C-A=(6,10,3)-(8,4,0)=(-2,6,3)$

Desta forma, $B=(8,4,0)+2(-2,6,3)=(8,4,0)+(-4,12,6)=(4,16,6)$.

5. Opção (B)

$$u_n=\frac{23}{5} \Leftrightarrow \frac{5n-5}{n+1}=\frac{23}{5} \underbrace{\Leftrightarrow}_{n\in\mathbb{N}} 25n-25=23n+23$$

$$\Leftrightarrow 2n=48$$

$$\Leftrightarrow n=24$$

6. $u_3 = 31 \Leftrightarrow -3u_2 + 5 \times 2 = 31$

$\Leftrightarrow -3u_2 = 21$

$\Leftrightarrow u_2 = -7$

$u_2 = -7 \Leftrightarrow -3u_1 + 5 \times 1 = -7$

$\Leftrightarrow -3u_1 = -12$

$\Leftrightarrow u_1 = 4$

$u_1 = 4 \Leftrightarrow a = 4$

$v_n = a \Leftrightarrow n^2 - 32 = 4 \Leftrightarrow n^2 = 36$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{n \in \mathbb{N}} n = 6$

O valor de n é 6.

7. Opção (D)

A sucessão (u_n) não é monótona, pois, por exemplo, $u_1 = -1, u_2 = 1$ e $u_3 = -1$, logo $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$.

$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1+5} - \frac{2n+1}{n+5} =$

$= \frac{2n+3}{n+6} - \frac{2n+1}{n+5} =$

$= \frac{(2n+3)(n+5)-(2n+1)(n+6)}{(n+6)(n+5)} =$

$= \frac{2n^2+10n+3n+15-2n^2-12n-n-6}{(n+6)(n+5)} =$

$= \frac{9}{(n+6)(n+5)}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{(n+6)(n+5)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+6)(n+5) > 0$, pelo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{9}{(n+6)(n+5)} > 0$.

Desta forma, conclui-se que, como $v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então (v_n) é monótona crescente.

8.

8.1 Como cada semicircunferência, a partir da segunda, tem mais 2 unidades de diâmetro do que a semicircunferência anterior, então $d_{n+1} - d_n = 2$, para qualquer $n \geq 1$, sendo (d_n) a sucessão dos diâmetros das semicircunferências. Pelo facto de esta diferença ser constante, estamos perante uma sucessão (d_n), que é uma progressão aritmética e a sua razão é 2.

Desta forma, $d_1 = 1$ e $d_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

Sendo (c_n) a sucessão que a cada termo faz corresponder o perímetro da correspondente semicircunferência, temos que $c_n = \frac{\pi \times (2n-1)}{2}$.

$$c_{n+1} - c_n = \frac{\pi \times (2(n+1)-1)}{2} - \frac{\pi \times (2n-1)}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \times (2n + 2 - 1 - 2n + 1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi, \text{ para qualquer } n \geq 1.$$

Como a diferença entre dois quaisquer termos consecutivos é constante, a sequência dos comprimentos das semicircunferências é uma progressão aritmética e a sua razão é π.

8.2 $c_1 = \frac{\pi\times(2\times1-1)}{2} = \frac{\pi}{2}$; $c_{50} = \frac{\pi\times(2\times50-1)}{2} = \frac{99\pi}{2}$

$$S_{50} = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{99\pi}{2}}{2} \times 50 = 25\pi \times 50 = 1250\pi$$

9. Seja (u_n) a progressão aritmética de razão r e (v_n) a progressão geométrica de razão 3.

Sabe-se que a soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética é igual a 255, $S_{10} = 255$, e que a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é igual a 240, $S_4 = 240$.

Da segunda igualdade, tem-se que:

$$S_4 = v_1 \times \frac{1-3^4}{1-3} = 240 \Leftrightarrow v_1 \times 40 = 240$$

$$\Leftrightarrow v_1 = 6$$

Como o primeiro termo de (u_n) é igual a metade do primeiro termo de (v_n), então:

$u_1 = 6 \div 2 = 3$

Da primeira igualdade, tem-se que:

$$S_{10} = 255 \Leftrightarrow \frac{3 + 3 + 9 \times r}{2} \times 10 = 255$$

$$\Leftrightarrow 6 + 9r = 51$$

$$\Leftrightarrow 9r = 45$$

$$\Leftrightarrow r = 5$$

Assim, a razão da progressão aritmética é 5.