TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Seja c o comprimento do arco AB. O perímetro da região sombreada é igual a:

$$\overline{OA} + c + \overline{BC} + \overline{CO}$$

- $c = (\pi - \alpha) \times 2 = 2\pi - 2\alpha$
- $2\pi r = 4\pi \Leftrightarrow r = 2$

  Desta forma, $\overline{OA} = 2$ e $\overline{CO} = 2$.
- $\alpha + \frac{\pi}{2}$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}C$, logo:

$$C\left(2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), 2\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

  $2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \times (-\text{sen}\,\alpha) = -2\text{sen}\alpha$

  $2\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \cos\alpha = 2\cos\alpha$

  Assim, as coordenadas do ponto C são $(-2\text{sen}\,\alpha, 2\cos\alpha)$.
- As coordenadas do ponto B são $(-2, 0)$.
- $\overline{BC} = \sqrt{\left(-2\text{sen}\,\alpha - (-2)\right)^2 + (2\cos\alpha - 0)^2} = \sqrt{(-2\text{sen}\,\alpha + 2)^2 + 4\cos^2\alpha} =$

$$= \sqrt{4\text{sen}^2\alpha - 8\text{sen}\,\alpha + 4 + 4\cos^2\alpha} =$$
$$= \sqrt{4(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) - 8\text{sen}\,\alpha + 4} =$$
$$= \sqrt{4 \times 1 - 8\text{sen}\,\alpha + 4} =$$
$$= \sqrt{8 - 8\,\text{sen}\,\alpha}$$

Desta forma:

$$\overline{OA} + c + \overline{BC} + \overline{CO} = 2 + 2\pi - 2\alpha + \sqrt{8 - 8\,\text{sen}\,\alpha} + 2 = 4 + 2\pi - 2\alpha + \sqrt{4(2 - 2\text{sen}\,\alpha)} =$$
$$= 4 + 2\pi - 2\alpha + 2\sqrt{2 - 2\text{sen}\,\alpha}$$

De onde se conclui que:

$$\frac{P(\alpha)}{2} = \frac{4 + 2\pi - 2\alpha + 2\sqrt{2 - 2\text{sen}\,\alpha}}{2} = 2 + \pi - \alpha + \sqrt{2 - 2\text{sen}\,\alpha}$$

2. Comecemos por determinar a equação reduzida da reta s:

$m_r = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r, $m_r \times m_s = -1$.

Logo, $m_s = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Desta forma, a equação reduzida da reta s é da forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

A reta s interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 3, logo o ponto de coordenadas $(3, 0)$ pertence à reta s. Substituindo estas coordenadas por x e y, respetivamente, na equação obtida anteriormente obtemos o valor de b. Assim:

$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3}$

Logo, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

O ponto A tem ordenada $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e pertence à reta s:

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow x = 1$

Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Desta forma, a circunferência de centro em A, que é tangente ao eixo Oy, tem raio igual ao valor da abcissa de A.

A equação reduzida da circunferência de centro em A e que é tangente ao eixo Oy é:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

3. Opção (B)

4.

4.1 A reta CE é paralela à reta BH, pelo que o vetor de coordenadas $(6, 16, -10)$ é um vetor diretor da reta CE. Desta forma, uma equação vetorial da reta CE é:

$$(x, y, z) = (7, 11, 4) + k(6, 16, -10), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo $(7 + 6k, 11 + 16k, 4 - 10k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ACF, obtemos:

$$\begin{aligned} 7 + 6k - 9(11 + 16k) - 4(4 - 10k) + 59 = 0 &\Leftrightarrow 7 + 6k - 99 - 144k - 16 + 40k + 59 = 0 \\ &\Leftrightarrow -98k = 49 \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para $k = -\frac{1}{2}$, obtemos o ponto de coordenadas:

$$\left(7 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 11 + 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 4 - 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (4, 3, 9)$$

Logo, as coordenadas do ponto C são $(4, 3, 9)$.

4.2 Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor da reta AG de coordenadas $(9,-4,-1)$ e $\vec{s}$ um vetor diretor da reta BH de coordenadas $(6,16,-10)$.

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor, não nulo, simultaneamente perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{s}$.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{r}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{s}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot(9,-4,-1)=0\\ (a,b,c)\cdot(6,16,-10)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a-4b-c=0\\ 6a+16b-10c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-4b\\ 6a+16b-10\times(9a-4b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-4b\\ 6a+16b-90a+40b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-4b\\ -84a+56b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-4b\\ b=\frac{3a}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-4\times\left(\frac{3a}{2}\right)\\ b=\frac{3a}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=9a-6a\\ b=\frac{3a}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3a\\ b=\frac{3a}{2}\end{cases}$$

Seja, por exemplo, $a=2$: $\vec{n}=\left(2,\frac{3\times2}{2},3\times2\right)=(2,3,6)$

Assim, uma equação cartesiana do plano ABG é da forma $2x+3y+6z+d=0$ e o ponto de coordenadas $(17,-2,-1)$ pertence ao plano, logo:

$2\times17+3\times(-2)+6\times(-1)+d=0\Leftrightarrow d=-22$

Uma equação cartesiana do plano ABG é $2x+3y+6z-22=0$.

5. Opção (A)

$u_1=a$

$u_2=-3u_1-1=-3a-1$

$u_3=-3u_2-2=-3\times(-3a-1)-2=9a+3-2=9a+1$

$u_3=10$, logo $9a+1=10\Leftrightarrow 9a=9\Leftrightarrow a=1$.

6. $u_{n+1}=\frac{2-4(n+1)}{n+1+2}=\frac{2-4n-4}{n+3}=\frac{-4n-2}{n+3}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-4n-2}{n+3}-\frac{2-4n}{n+2}=\frac{(-4n-2)(n+2)-(2-4n)(n+3)}{(n+3)(n+2)}=$$

$$=\frac{-4n^2-8n-2n-4-2n-6+4n^2+12n}{(n+3)(n+2)}=$$

$$=\frac{-10}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-10}{(n+3)(n+2)},\forall n\in\mathbb{N}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+3)(n+2)>0$, pelo que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{-10}{(n+3)(n+2)}<0$.

Desta forma, conclui-se que, como $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}$, então (u_n) é monótona decrescente.

7. Para $n \leq 3$:

$a_1 = \cos(\pi) = -1$

$a_2 = \cos(2\pi) = 1$

$a_3 = \cos(3\pi) = -1$

Para $n \geq 4$:

$a_n = \frac{8n+1}{n+2} = 8 - \frac{15}{n+2}$

$n + 2 \geq 6$, pelo que:

$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 0 < \frac{15}{n+2} \leq \frac{15}{6}$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{15}{n+2} \leq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq -\frac{15}{n+2} < 0$

$\Leftrightarrow 8 - \frac{5}{2} \leq 8 - \frac{15}{n+2} < 8$

$\Leftrightarrow 8 - \frac{5}{2} \leq 8 - \frac{15}{n+2} < 8$

$\Leftrightarrow \frac{11}{2} \leq 8 - \frac{15}{n+2} < 8$

Desta forma, conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq a_n < 8$, logo (a_n) é limitada.

8. Opção (D)

Na opção (A): $-n^2 + (-1)^n = \begin{cases} -n^2 + 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -n^2 - 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\lim(-n^2 + 1) = -\infty$

$\lim(-n^2 - 1) = -\infty$

Na opção (B): $n^2 \times (-1)^n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\lim(n^2) = +\infty$

$\lim(-n^2) = -\infty$

Na opção (C): $\frac{-1}{(-1)^n} \times n^2 = \begin{cases} -n^2 & \text{se } n \text{ é par} \\ n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\lim(-n^2) = -\infty$

$\lim(n^2) = +\infty$

Na opção (D): $(-1)^n \times \frac{1}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \\ \lim\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0 \end{array}\right\}$$ A sucessão definida por $(-1)^n \times \frac{1}{n^2}$ é convergente para 0.

9. O número de quilómetros percorridos semanalmente são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2.

O primeiro termo desta sucessão é 5, pelo que o termo geral desta progressão é dado por:

$$5 + 2(n-1) = 5 + 3n - 2 = 2n + 3$$

Seja S_n a soma dos quilómetros percorridos pela Susana ao fim de n semanas.

Desta forma:

$$S_n = 320 \Leftrightarrow \frac{5+2n+3}{2} \times n = 320 \Leftrightarrow \frac{2n+8}{2} \times n = 320$$
$$\Leftrightarrow (n+4) \times n = 320$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 320 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-320)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{1296}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm 36}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{-40}{2} \vee n = \frac{32}{2}$$
$$\Leftrightarrow n = -20 \vee n = 16$$

$n \in \mathbb{N}$, logo $n = 16$.

Ao fim de 16 semanas, a Susana terá percorrido, em treino longo, um total de 320 km.

10. Opção (C)

(u_n) é uma progressão geométrica da qual se sabe que é monótona e que $u_9 = \frac{1}{27}$ e $u_{15} = 27$.

Logo, $\frac{u_{15}}{u_9} = r^6$ e $r > 0$.

$\frac{27}{\frac{1}{27}} = r^6 \Leftrightarrow r^6 = 27^2 \Leftrightarrow r^6 = (3^3)^2 \Leftrightarrow r^6 = 3^6$

$r > 0$, logo $r = 3$.

Assim:

$u_9 = u_1 \times 3^8 \Leftrightarrow \frac{1}{27} = u_1 \times 3^8 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{27}}{3^8} = u_1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{3^{-3}}{3^8} \Leftrightarrow u_1 = 3^{-11}$

11. Opção (A)

$$S_n = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{-127}{-1} = 381$$

$$\Leftrightarrow u_1 \times 127 = 381$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 3$$

Desta forma, o termo geral desta progressão é:

$u_n = 3 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n \times 2^{-1} = \frac{3}{2} \times 2^n$

12. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}\right) =$

$= \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE} =$

$= -\overline{DC} \times \frac{3}{2}\overline{DC} + 0 + \overline{DC} \times \frac{3}{4}\overline{DC} + 0 + \overline{DC} \times \overline{DC} + 0 =$

$= -\frac{3}{2}\overline{DC}^2 + \frac{3}{4}\overline{DC}^2 + \overline{DC}^2 =$

$= \frac{\overline{DC}^2}{4}$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, pois $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$, pois $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{DO}$.
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$, pois $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AE}$.

Uma vez que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 4$, então $\frac{\overline{DC}^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \overline{DC}^2 = 16$.

Desta forma, $\overline{DC} = 4$.

Assim, $\overline{OA} = 4$, $\overline{OD} = \frac{3}{2} \times 4 = 6$ e $\overline{OC} = 6 + 4 = 10$.

Portanto, $A_{[OABC]} = 4 \times 10 = 40$ u.a.

<u>Outro processo de resolução</u>

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que as coordenadas do ponto A são $(a, 0)$.

$\overline{OD} = \frac{3}{2}a$, pelo que $\overline{OC} = \frac{3}{2}a + a = \frac{5}{2}a$.

Desta forma, o ponto B tem coordenadas $\left(a, \frac{5}{2}a\right)$, o ponto D tem coordenadas $\left(0, \frac{3}{2}a\right)$ e o ponto E tem coordenadas $\left(a, \frac{3}{4}a\right)$.

$$\overrightarrow{DB} = B - D = \left(a, \frac{5}{2}a\right) - \left(0, \frac{3}{2}a\right) = (a, a)$$

$$\overrightarrow{DE} = E - D = \left(a, \frac{3}{4}a\right) - \left(0, \frac{3}{2}a\right) = \left(a, -\frac{3}{4}a\right)$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 4 \Leftrightarrow (a, a).\left(a, -\frac{3}{4}a\right) = 4 \Leftrightarrow a^2 - \frac{3}{4}a^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = 4$$

$\Leftrightarrow a^2 = 16$ e $a \in \mathbb{R}^+$, logo $a = 4$.

Assim, $\overline{OA} = 4$, $\overline{OC} = \frac{5}{2} \times 4 = 10$.

$A_{[OABC]} = 4 \times 10 = 40$ u.a.