Teste de Matemática A

2023 / 2024

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

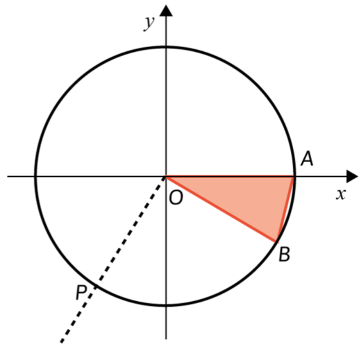
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura está representada, num referencial ortonormado Oxy, a circunferência de centro em O e raio 4. Sabe-se que:

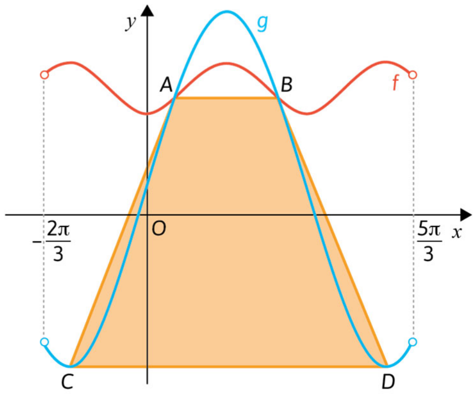


- os pontos A, B e P pertencem à circunferência;
- o ponto A tem abcissa positiva e ordenada nula;
- o ponto B é obtido a partir do ponto P por uma rotação de centro no ponto O e amplitude $90°$;
- o ponto P pertence ao 3.º quadrante e tem abcissa -2.

A área do triângulo $[OAB]$ é:

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $4\sqrt{3}$ **(D)** $2\sqrt{3}$

2. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$, representadas graficamente na figura e definidas por:



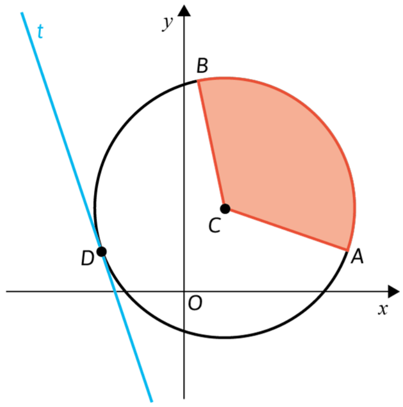
$$f(x) = 2\operatorname{sen}^2(-x) + 4 \quad \text{e} \quad g(x) = 7\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

Sabe-se que:

- A e B, ambos de abcissa positiva, são pontos de interseção dos gráficos de f e de g;
- C, de abcissa negativa, e D, de abcissa positiva, são pontos do gráfico de g cuja ordenada é mínima.

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, a área do trapézio $[ABCD]$.

3. Na figura estão representados, num referencial ortonormado Oxy, a circunferência C, de equação $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 40$, a reta t e quatro pontos, A, B, C e D.



Sabe-se que:

- A, B e D são pontos da circunferência;
- C é o centro da circunferência;
- D tem abcissa negativa e ordenada igual à abcissa do ponto C;
- a reta t é tangente à circunferência no ponto D.

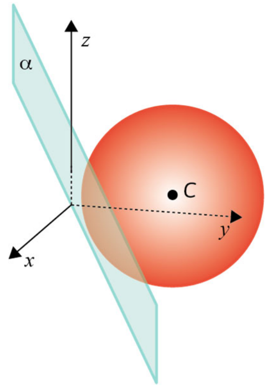
3.1 Sabendo que a área da região colorida é $\frac{40\pi}{3}$, o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ é:

(A) 20 **(B)** $20\sqrt{3}$ **(C)** -20 **(D)** $-20\sqrt{3}$

3.2 Seja β a inclinação da reta t. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor exato de $\operatorname{sen}\left(-\beta - \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de centro no ponto C definida pela equação:

$$(x-6)^2+(y-10)^2+(z-3)^2=49$$



Sabe-se que:

- o plano α é tangente, num ponto A, à superfície esférica e é definido pela equação cartesiana:

$$-2x+6y+3z-8=0$$

- $[AB]$ é um diâmetro da superfície esférica.

4.1 Seja R um ponto pertencente ao plano α, de cota nula e cuja abcissa é simétrica da sua ordenada. Recorrendo às propriedades do produto escalar entre dois vetores, escreva uma equação do plano mediador do segmento de reta $[RC]$.

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$.

4.2 Qual das seguintes equações define um plano paralelo ao plano α e que passa no ponto de coordenadas $(1,-3,5)$?

(A) $-2x+6y+3z-3=0$

(B) $6x+y+2z+15=0$

(C) $6x+y+2z-13=0$

(D) $-2x+6y+3z+5=0$

4.3 Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto B.

5. Seja (u_n) uma sucessão definida por $u_n=\frac{5n-5}{n+1}$. Pode afirmar-se que $\frac{23}{5}$ é termo de ordem:

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 36 **(D)** 48

6. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1=a, \quad a\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=-3u_n+5n, \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Seja (v_n) a sucessão cujo termo geral é $v_n=n^2-32$.

Sabendo que o terceiro termo da sucessão (u_n) é 31, determine o valor de n para o qual $v_n=a$.

7. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n=(-1)^n$ e $v_n=\frac{2n+1}{n+5}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

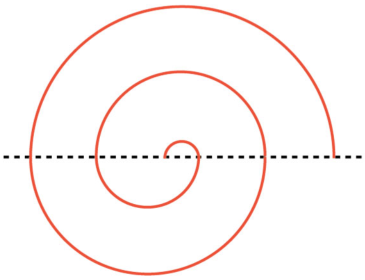
(A) Ambas as sucessões são monótonas.

(B) Ambas as sucessões são não monótonas.

(C) A sucessão (u_n) é monótona e a sucessão (v_n) é não monótona.

(D) A sucessão (u_n) é não monótona e a sucessão (v_n) é monótona.

8. Considere uma espiral constituída por 50 semicircunferências, de diâmetros 1, 3, 5, 7, 9, e assim sucessivamente, tendo cada semicircunferência, a partir da segunda, mais 2 unidades de diâmetro do que a semicircunferência anterior, como se representa na figura. Considere a sequência crescente dos comprimentos das semicircunferências. Os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.



8.1 Mostre que os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é π.

8.2 Determine o comprimento total da espiral constituída pelas 50 semicircunferências.

9. Considere duas progressões, uma aritmética e uma geométrica, das quais se sabe que:

- o primeiro termo da progressão aritmética é igual a metade do primeiro termo da progressão geométrica;
- a razão da progressão geométrica é 3;
- a soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética é igual a 255;
- a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é igual a 240.

Determine a razão da progressão aritmética.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1**	**8.2**	**9.**	**Total**
10	20	10	18	18	10	20	10	18	10	18	18	20	**200**