Teste de Matemática A

2023 / 2024

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

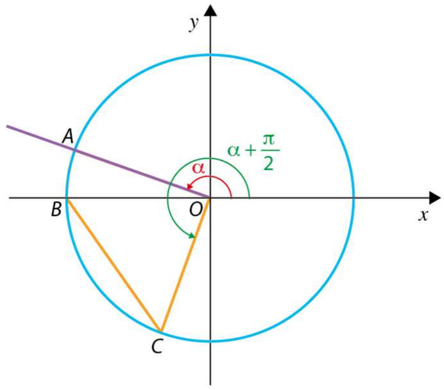
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência centrada na origem e de perímetro igual a 4π, o setor circular de centro O delimitado pelo arco AB e o triângulo $[OBC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao segundo quadrante e à circunferência;
- o ponto B é a interseção da circunferência com o semieixo negativo Ox;
- o ponto C pertence ao terceiro quadrante e à circunferência;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;



- $\alpha + \frac{\pi}{2}$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}C$.

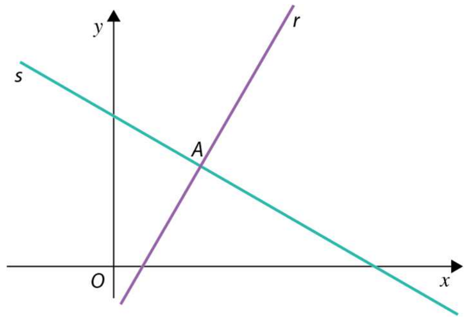
Seja $P(\alpha)$ a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α.

Mostre que $\frac{P(\alpha)}{2} = 2 + \pi - \alpha + \sqrt{2 - 2\text{sen}\alpha}$.

2. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, duas retas r e s.

Sabe-se que:

- a reta r tem inclinação $\frac{\pi}{3}$;
- a reta s é perpendicular à reta r no ponto A;
- o ponto A tem ordenada $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;
- a reta s interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.



Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da circunferência de centro em A e que é tangente ao eixo Oy.

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, dois pontos distintos A e B.

Qual é o lugar geométrico do conjunto dos pontos P do espaço que satisfazem a condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$?

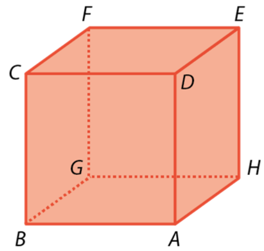
(A) Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

(B) Superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

(C) Plano tangente em A à superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

(D) Plano tangente em B à superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

4. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.



Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

- o ponto E de coordenadas $(7, 11, 4)$;
- o plano ACF definido pela equação $x - 9y - 4z + 59 = 0$;
- a reta AG definida pela equação:

$$(x, y, z) = (17, -2, -1) + k(9, -4, -1), k \in \mathbb{R}$$

- a reta BH definida pela equação $(x, y, z) = (8,16, -7) + k(6,16, -10), k \in \mathbb{R}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.

4.1 Determine as coordenadas do ponto C.

4.2 Determine uma equação cartesiana do plano ABG.

Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, em que a, b, c e d são números reais.

5. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n - n, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabendo que o terceiro termo da sucessão (u_n) é 10, o valor de a é:

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 3 **(D)** -3

6. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{2-4n}{n+2}$.

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

7. Seja (a_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} \cos(n\pi) & \text{se } n \leq 3 \\ \dfrac{8n+1}{n+2} & \text{se } n > 3 \end{cases}$$

Mostre que a sucessão (a_n) é limitada.

8. Qual das expressões seguintes é o termo geral de uma sucessão convergente?

(A) $-n^2 + (-1)^n$ **(B)** $n^2 \times (-1)^n$ **(C)** $\frac{-1}{(-1)^n} \times n^2$ **(D)** $(-1)^n \times \frac{1}{n^2}$

9. A Susana é adepta de desporto e decidiu participar na maratona do Porto, que acontecerá em novembro.

De forma a concluir com sucesso o seu objetivo, dará início a um plano de treinos, a partir de meados de junho.

Neste plano está incluído um treino semanal específico – treino longo – que implica, num dia fixo, percorrer a maior distância dessa semana.

Semanalmente, neste treino específico, é aumentado o número de quilómetros percorridos.

No treino longo da primeira semana, a Susana efetuará uma corrida de 5 km, aumentando depois, semanalmente, 2 km à distância percorrida.

Mantendo este plano de treinos, ao fim de quantas semanas terá a Susana percorrido, em treino longo, um total de 320 km?

10. Relativamente a uma progressão geométrica monótona (u_n), sabe-se que:

- $u_9 = \frac{1}{27}$
- $u_{15} = 27$

O primeiro termo da progressão geométrica (u_n) é:

(A) 3^{-8}

(B) 3^{8}

(C) 3^{-11}

(D) 3^{11}

11. A soma dos sete primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é 381.

O termo geral desta progressão é:

(A) $\frac{3}{2} \times 2^n$

(B) $\frac{2}{3} \times 3^n$

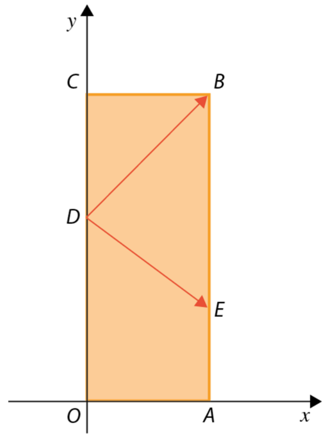
(C) $\frac{2}{3} \times 2^n$

(D) $\frac{3}{2} \times 3^n$

12. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OC]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$;
- $\overline{OA} = \overline{DC}$;
- $\overline{OD} = \frac{3}{2}\overline{DC} = 2\overline{AE}$;
- $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 4$.



Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato da área do retângulo $[OABC]$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**Total**
20	18	10	18	18	10	18	18	10	20	10	10	20	**200**