TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$\frac{\cos^2\beta}{1-\text{sen}\,\beta}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\text{sen}\,\beta)}{(1-\text{sen}\,\beta)(1+\text{sen}\,\beta)}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\text{sen}\,\beta)}{1-\text{sen}^2\beta}=\frac{\cos^2\beta\,(1+\text{sen}\,\beta)}{\cos^2\beta}=1+\text{sen}\,\beta$$

2.

2.1. Opção (B)

Em $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$: $\quad \text{tg}x\ \text{sen}x=0$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,x=0 \quad \vee \ \text{sen}\,x=0$

$\Leftrightarrow x=k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Logo, neste intervalo, f tem apenas um zero: 0

Em $]0,2\pi]$: $\quad 2\ \text{sen}x+1=0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=1$, tem-se que $x=\frac{11\pi}{6}$ e $x=\frac{7\pi}{6}$.

Logo, neste intervalo, os zeros de f são $\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

Assim, o conjunto dos zeros da função f no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ é $\left\{0,\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.

2.2. Colocando na calculadora:

$y_1=\text{tg}\,x\ \text{sen}\,x,\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$

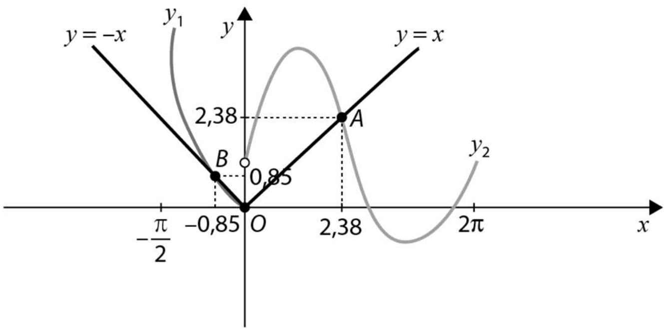
$y_2=2\text{sen}\,x+1,\ \ x\in]0,2\pi]$

$y_3=x$

$y_4=-x$

$A(2{,}38;2{,}38)$

$B(-0{,}85;0{,}85)$



$$d(A,B)=\sqrt{(2{,}38-(-0{,}85))^2+(2{,}38-0{,}85)^2}=\sqrt{12{,}7738}\approx 3{,}6$$

3.

3.1. $x^2+y^2-6y=0\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=9\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=9$

O centro da circunferência é o ponto C e tem coordenadas $(0,3)$.

Como o ponto A pertence à circunferência e tem ordenada 4, então $A(x,4)$.

$x^2+(4-3)^2=9\Leftrightarrow\ x^2+1=9\Leftrightarrow\ x^2=8\Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{8}$

E, como $x > 0$, vem que $A(\sqrt{8}, 4)$, ou seja, $A(2\sqrt{2}, 4)$.

Assim, o declive da reta *AC* é $m_{AC} = \frac{4-3}{2\sqrt{2}-0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e o declive da reta t, perpendicular à reta *AC*, é $m_t = -\frac{1}{m_{AC}} = -2\sqrt{2}$.

Seja α a inclinação da reta t: $m_t = \operatorname{tg} \alpha$, ou seja, $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$ e $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(-2\sqrt{2})$, logo $\alpha \approx 109{,}5°$.

3.2. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2}$.

Determinação das coordenadas do ponto B:

$t: y = -2\sqrt{2}\,x + b$

Como $A(2\sqrt{2}, 4) \in t$:

$4 = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + b \Leftrightarrow 4 = -8 + b$

$\Leftrightarrow b = 12$

$t: y = -2\sqrt{2}\,x + 12$

Como o ponto B pertence à reta t e tem ordenada 0:

$0 = -2\sqrt{2}\,x + 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$

$B(3\sqrt{2}, 0)$

$\overline{AB} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + (0-4)^2} = \sqrt{2+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overline{AC} = 3$ (raio da circunferência)

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (8, 5, 0) - (11, -1, 2) = (-3, 6, -2)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (13, 2, 8) - (11, -1, 2) = (2, 3, 6)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor, não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-3, 6, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 3, 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6b - 2c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b-2c}{3} \\ 2\left(\frac{6b-2c}{3}\right) + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 12b - 4c + 9b + 18c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 21b + 14c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ c = -\frac{21}{14}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b - 2 \times \left(-\frac{3}{2}b\right)}{3} \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6b+3b}{3} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ c = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $b = 2$, $\vec{n}(6, 2, -3)$.

Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é da forma $6x + 2y - 3z + d = 0$ e, como $B(8, 5, 0)$ pertence ao plano, vem que $6 \times 8 + 2 \times 5 - 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -58$.

Equação cartesiana do plano ABE: $6x + 2y - 3z - 58 = 0$

4.2. $C = D + \overrightarrow{AB} = (5, -3, 5) + (-3, 6, -2) = (2, 3, 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (11, -1, 2) = (-9, 4, 1)$

Uma equação vetorial da reta AC pode, então, ser $(x, y, z) = (2, 3, 3) + k(-9, 4, 1), k \in \mathbb{R}$.

4.3. Opção (C)

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices, em particular, dos vértices C e E.

O centro é o ponto médio de $[CE]$:

$C = (2, 3, 3)$ e $E = (13, 2, 8)$

Centro $= \left(\frac{2+13}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Como $[CE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

raio $= \frac{d(C,E)}{2} = \frac{\sqrt{(13-2)^2+(2-3)^2+(8-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{121+1+25}}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2}$

Portanto, a condição pedida é $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{147}}{2}\right)^2$, ou seja,

$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{147}{4}$.

4.4. $\overrightarrow{OE} = E - O = (13, 2, 8) - (0, 0, 0) = (13, 2, 8)$

O plano α é perpendicular à reta OE, logo é definido por uma equação do tipo

$13x + 2y + 8z + d = 0$. Como a origem O pertence ao plano α, então $d = 0$.

Logo, o plano α pode ser definido por $13x + 2y + 8z = 0$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (2, 3, 6)$

Equação vetorial da reta BF: $(x, y, z) = (8, 5, 0) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta BE é do tipo$(8 + 2k, 5 + 3k,\ 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$13(8 + 2k) + 2(5 + 3k) + 8(6k) = 0 \Leftrightarrow 104 + 26k + 10 + 6k + 48k = 0$

$\Leftrightarrow 80k = -114$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{114}{80}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{57}{40}$$

Para $k = -\frac{57}{40}$, obtemos o ponto P de coordenadas $\left(8 + 2 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 5 + 3 \times \left(-\frac{57}{40}\right), 6 \times \left(-\frac{57}{40}\right)\right) = \left(\frac{103}{20}, \frac{29}{40}, -\frac{171}{20}\right)$.

Logo, a distância do ponto P ao plano xOy é o valor absoluto da cota de P, isto é, $\frac{171}{20}$, ou seja, $8{,}55$.

5. Opção (A)

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{1}{3}x + 1$, e α é a sua inclinação, logo sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\operatorname{tg}(2022\pi + \alpha) + \cos^2(2021\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + \cos^2(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + (-\cos\alpha)^2 =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9}{10} =$$

$$= \frac{37}{30}$$

6. Opção (A)

A sucessão (u_n) é limitada, pois $-1 \leq u_n \leq 2022, \forall n \in \text{IN}$.

Observe-se que:

- se $n \leq 2022$, então $1 \leq u_n \leq 2022$;
- se $n > 2022$, então $u_n = -1$.

A sucessão (v_n) é limitada, pois $-1 \leq v_n \leq 1, \forall n \in \text{IN}$.

Observe-se que:

- se n é par, então $v_n = \frac{1}{n}$ e $0 < \frac{1}{n} \leq 1$;
- se n é ímpar, então $v_n = -\frac{1}{n}$ e $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$.

7. Seja (u_n) a progressão geométrica de razão 2 e (v_n) a progressão aritmética de razão r.

Sabe-se que $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}_{\frac{1-2^4}{1-2}\times u_1} = 75$ e que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 75$.

Assim:

$$\frac{1-2^4}{1-2} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow \frac{-15}{-1} \times u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

E, como $u_1 = v_1$, vem que $\underbrace{5 + v_2 + v_3 + v_4}_{\frac{5+v_4}{2}\times 4} = 75$.

Assim:

$$\frac{5+v_4}{2} \times 4 = 75 \Leftrightarrow 5 + v_4 = \frac{75}{2} \Leftrightarrow v_4 = \frac{75}{2} - 5 \Leftrightarrow v_4 = \frac{65}{2}$$

$v_4 = v_1 + 3r \Leftrightarrow \frac{65}{2} = 5 + 3r \Leftrightarrow r = \frac{55}{6}$

A razão da progressão aritmética é $\frac{55}{6}$.