TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Na opção (A) não se encontra uma proposição verdadeira, pois, no 1.º quadrante, a função seno não é decrescente.

Na opção (B) não se encontra uma proposição verdadeira, pois, no 2.º quadrante, a função cosseno não é crescente.

Na opção (C) encontra-se uma proposição verdadeira, já que, no 3.º quadrante, $\operatorname{tg} \alpha > 0$ e existe α tal que $\operatorname{tg}\alpha = 2020$.

Na opção (D) não se encontra uma proposição verdadeira, pois não existe um valor de α tal que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2020}$ e $\cos\alpha = \frac{2019}{2020}$, já que não verifica a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(-\frac{1}{2020}\right)^2 + \left(\frac{2019}{2020}\right)^2 \neq 1$$

2.

2.1. $A_{[AMP]} = A_{[ABCD]} - A_{[ABM]} - A_{[APD]} - A_{[MPC]} =$

$$= 2^2 - \frac{\overline{AB}\times\overline{BM}}{2} - \frac{\overline{PD}\times\overline{AD}}{2} - \frac{\overline{CP}\times\overline{MC}}{2} =$$

$$= 4 - \frac{2\times1}{2} - \frac{2\operatorname{tg}\beta\times2}{2} - \frac{(2-2\operatorname{tg}\beta)\times1}{2} =$$

$$= 4 - 1 - 2\operatorname{tg}\beta - 1 + \operatorname{tg}\beta =$$

$$= 2 - \operatorname{tg}\beta \quad \text{c.q.d.}$$

Cálculo auxiliar

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{PD}}{2} \Leftrightarrow \overline{PD} = 2\operatorname{tg}\beta$

$\overline{CP} = 2 - \overline{PD} = 2 - 2\operatorname{tg}\beta$

2.2. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x)$:

$$2 - \operatorname{tg}x = 2\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x + 2 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x(2\operatorname{sen}x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 0 \quad \vee \quad 2\operatorname{sen}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.

3.1. Opção (B)

Seja α o ângulo côncavo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como sabemos que a área da região sombreada é $\frac{20\pi}{3}$, então:

$$\frac{A_{\text{círculo}}}{2\pi} = \frac{\frac{20\pi}{3}}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\pi\times\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\pi} = \frac{\frac{20\pi}{3}}{\alpha} \Leftrightarrow 5\alpha = \frac{20\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Assim:

$\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(2\pi - \alpha) =$

$= \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -5$

3.2. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10 \ \wedge \ y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (0+1)^2 = 10 \ \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \ \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2 = 3 \ \vee \ x - 2 = -3) \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow (x = 5 \ \vee \ x = -1) \ \wedge \ y = 0$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas têm coordenadas (5, 0) e $(-1, 0)$.

Sendo que D tem abcissa positiva, então $D(5, 0)$.

$\overrightarrow{DC} = C - D = (2, -1) - (5, 0) = (-3, -1)$

$m_{DC} = \frac{1}{3}$

Como t é perpendicular a DC, vem que $m_t = -3$.

Logo, a equação reduzida da reta t é da forma $y = -3x + b, b \in \mathbb{R}$. Como $D(5, 0) \in t$, vem que:

$0 = -3 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 15$

A equação reduzida da reta t é, então, $y = -3x + 15$.

4.

4.1. Opção (A)

Como β é o plano que contém a outra base do prisma, então β é paralelo a α e contém o ponto A.

Assim, um vetor normal a β pode ser o vetor de coordenadas $\left(-1, \frac{5}{2}, 1\right)$ e uma equação que define o plano β é da forma $-x + \frac{5}{2}y + z + d = 0, d \in \mathbb{R}$. Como $A \in \beta$, vem que:

$-1 + \frac{5}{2} \times 2 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

O plano β pode, então, ser definido pela condição $-x + \frac{5}{2}y + z - 7 = 0$ ou, de forma equivalente, $2x - 5y - 2z + 14 = 0$.

4.2. Seja I o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto A.

A altura do prisma é, então, a distância entre os pontos A e I.

Equação vetorial da reta AI: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\left(-1, \frac{5}{2}, 1\right), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $\left(1-k, 2+\frac{5}{2}k, 3+k\right), k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α, terá que verificar:

$$-(1-k)+\frac{5}{2}\left(2+\frac{5}{2}k\right)+(3+k)-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow -1+k+5+\frac{25}{4}k+3+k-\frac{47}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{33}{4}k=\frac{33}{2}$$

$$\Leftrightarrow k=2$$

Assim, o ponto I (ponto de interseção de α com a reta AI) tem coordenadas $\left(1-2, 2+\frac{5}{2}\times 2, 3+2\right)=(-1,7,5)$.

A altura do prisma é:

$$d(A,I)=\sqrt{(-1-1)^2+(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$$

4.3.

- $B(1,1,z)$

  $$-1+\frac{5}{2}\times 1+z-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow z=22$$

  $B(1,1,22)$

- $C(0,y,0)$

  $$-0+\frac{5}{2}y+0-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow y=\frac{47}{5}$$

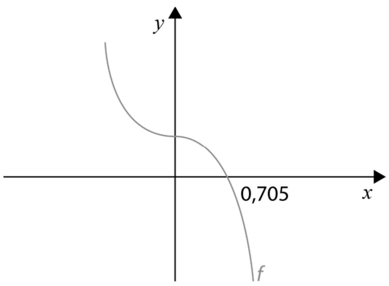
  $C\left(0,\frac{47}{5},0\right)$

- $D(x,1,x^3), x \in \mathbb{R}$

Como $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são perpendiculares, tem-se que:

$$\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{OD}=0 \Leftrightarrow \left(-1,\frac{42}{5},-22\right).(x,1,x^3)=0 \Leftrightarrow -x+\frac{42}{5}-22x^3=0$$

Determinemos o zero da função f definida por $f(x)=-x+\frac{42}{5}-22x^3$, utilizando a calculadora gráfica:



A abcissa do ponto D é aproximadamente 0,705.

5. Opção (C)

$u_1 = a$

$$u_2 = \frac{1-u_1}{2} = \frac{1-a}{2}$$

$$u_3 = \frac{1-u_2}{2} = \frac{1-\left(\frac{1-a}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2} = \frac{1+a}{4}$$

6.

6.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{2n+5}{n+1} = \frac{2n+2+5}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1} =$

$$= \frac{(2n+7)(n+1)-(n+2)(2n+5)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+7n+7-2n^2-5n-4n-10}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

6.2. $u_n = \frac{2n+5}{n+1} = 2 + \frac{3}{n+1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n+5 & n+1 \\ \cline{2-2} -2n-2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo:

$n + 1 \geq 2$

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2}$

$2 + \frac{3}{n+1} \leq \frac{7}{2}$

Por outro lado, também sabemos que, $\frac{3}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $2 + \frac{3}{n+1} > 2$.

Assim, $2 < u_n \leq \frac{7}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (u_n) é uma sucessão limitada.

(Note-se que podia igualmente ter sido provado que a sucessão (u_n) é limitada, mostrando que $0 < u_n < 5,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Observe-se que, por um lado, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por outro lado, tem-se que $\frac{3}{n+1} < 3$ e, logo, $u_n = 2 + \frac{3}{n+1} < 5, \forall n \in \mathbb{N}$.)

6.3. $v_1 = u_1 = \frac{2+5}{1+1} = \frac{7}{2}$

$v_2 = u_2 = \frac{2\times 2+5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

Seja S_{20} a soma dos 20 primeiros termos de (v_n):

$S_{20} = \frac{v_1+v_{20}}{2} \times 20 =$

$= \frac{\frac{7}{2}+(-6)}{2} \times 20 =$

$= -25$

Cálculos auxiliares

$r = v_2 - v_1 = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$

$v_{20} = v_1 + 19 \times r =$

$= \frac{7}{2} + 19 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -6$

7. Opção (B)

Sabe-se que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$.

Logo:

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \cos\alpha + 5^2$

$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 9 + 30 \times \frac{1}{15} + 25$

$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 36$

Assim, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$.

Cálculo auxiliar

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4\sqrt{14}}{15}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{224}{225}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{225}$

Como α é agudo, $\cos\alpha = \frac{1}{15}$.