TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. A altura da maré, no porto de Leixões, às 0 horas do dia 18 de outubro de 2023 é dada por $h(0)$:

$h(0) = 8 + 5\text{sen}(0{,}2 \times 0 + 1) = 8 + 5\text{sen}(1)$

Pretende-se determinar quanto tempo decorreu até ao primeiro instante em que se voltou a registar a mesma altura da maré, nesse porto, de acordo com o modelo apresentado, pelo que a equação que permite determinar esse instante é:

$$h(t) = h(0)$$

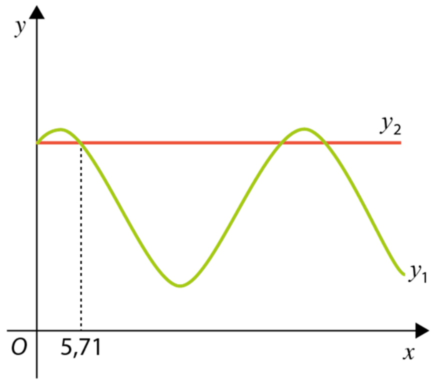
Utilizando x como variável independente:

$$8 + 5\text{sen}(0{,}2x + 1) = 8 + 5\text{sen}(1)$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = 8 + 5\text{sen}(0{,}2x + 1), \quad 0 \leq x \leq 48$

$y_2 = 8 + 5\text{sen}(1)$



$0{,}71 \times 60 \approx 43$

Decorreram 5 horas e 43 minutos até se voltar a registar a altura da maré registada às 0 horas.

2. Opção (A)

Uma vez que o hexágono regular $[ABCDEF]$ tem perímetro $6\sqrt{3}$, a medida de cada um dos seus lados é $\sqrt{3}$.

$$\overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FC}\right) = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FC}}_{\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{FC}} =$$

$$= \overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) + 0 =$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BD}$$

$$= \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \times \cos(180°) =$$

$$= -(3)^2 =$$

$$= -9$$

Cálculo auxiliar

$\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$

Assim:

$\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 + 3 = 12$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 = 9$

Logo, $\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = 3$.

3. Opção (B)

Sabendo que a reta r é perpendicular à reta s, podemos concluir que $m_r \times m_s = -1$.

$m_r = 2\sqrt{3} + 3a$ $\qquad\qquad$ $m_s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Assim:

$$\left(2\sqrt{3} + 3a\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 3a = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3a = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4.

4.1 Sendo $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à circunferência de diâmetro $[AB]$, tem-se $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0$.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (1, -3) = (x - 1, y + 3)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (4, -1) = (x - 4, y + 1)$

Assim:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0 &\Leftrightarrow (x - 1, y + 3).(x - 4, y + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) + (y + 3)(y + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x - x + 4 + y^2 + y + 3y + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 + 4y = -7 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + 2^2 = -7 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = -7 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{13}{4}$.

4.2 As coordenadas do ponto M, ponto médio de $[CD]$, são:

$M = \left(\frac{-10+4k+2k^2}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right) = (k^2 + 2k - 5, -3)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

A abcissa de M é simétrica da sua ordenada, logo:

$$\begin{aligned}
k^2 + 2k - 5 = 3 &\Leftrightarrow k^2 + 2k - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2} \\
&\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm 6}{2} \\
&\Leftrightarrow k = -4 \lor k = 2
\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}^+$, logo $k = 2$.

Logo, as coordenadas dos pontos C, D e M são, respetivamente:

$(-10 + 4 \times 2, 2) = (-2, 2)$

$(2 \times 2^2, -8) = (8, -8)$

$(2^2 + 2 \times 2 - 5, -3) = (3, -3)$

Sendo $P(x, y)$ um qualquer ponto pertencente à reta mediatriz de $[CD]$, tem-se $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MP} = 0$.

$\overrightarrow{CD} = D - C = (8, -8) - (-2, 2) = (10, -10)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y) - (3, -3) = (x - 3, y + 3)$

Assim:

$$\begin{aligned}(10, -10).(x - 3, y + 3) = 0 &\Leftrightarrow 10(x - 3) - 10(y + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10x - 30 - 10y - 30 = 0 \\ &\Leftrightarrow 10y = 10x - 60 \\ &\Leftrightarrow y = x - 6\end{aligned}$$

A equação $y = x - 6$ é a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[CD]$.

5. Opção (C)

A circunferência $\mathcal{C}$ é definida por $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4}$, pelo que as coordenadas do seu centro são $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 &\Leftrightarrow (x - 1, y - 3).\left(-\frac{1}{2} - 1, 1 - 3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1, y - 3).\left(-\frac{3}{2}, -2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x - 1) + (-2)(y - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 2y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}\end{aligned}$$

O conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem a condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ corresponde à reta tangente à circunferência em A definida pela equação reduzida $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$.

6. Opção (D)

Para que o ângulo AOP seja agudo, é necessário que se verifique $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OP} > 0$, sendo $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OP}$ vetores não colineares.

Uma vez que o ponto P pertence à reta r, as suas coordenadas são $(4 - 3k, 1 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{OA} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{OP} = (4 - 3k, 1 + k), k \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OP} > 0 \ \wedge \ \frac{4-3k}{2} \neq \frac{1+k}{4} \Leftrightarrow (2,4).(4-3k, 1+k) > 0 \ \wedge \ 16 - 12k \neq 2 + 2k$$

$$\Leftrightarrow 2(4-3k) + 4\,(1+k) > 0 \ \wedge \ 14k \neq 14$$

$$\Leftrightarrow 8 - 6k + 4 + 4k > 0 \ \wedge \ k \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -2k > -12 \ \wedge \ k \neq 1$$

$$\Leftrightarrow k < 6 \ \wedge \ k \neq 1$$

C.S. = $]-\infty, 1[\cup]1, 6[$

7. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto I, ponto de interseção da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto P, com o plano α.

O vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor normal ao plano α, logo é um vetor diretor de qualquer reta que lhe seja perpendicular.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto P é:

$$(x, y, z) = (-3, 4, -1) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo $(-3 + 2k, 4 - k, -1 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$$2(-3 + 2k) - (4 - k) + (-1 + k) - 7 = 0 \Leftrightarrow -6 + 4k - 4 + k - 1 + k - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k = 18$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

Para $k = 3$, obtemos o ponto de coordenadas $(-3 + 2 \times 3, 4 - 3, -1 + 3) = (3, 1, 2)$.

Logo, $I(3, 1, 2)$.

Seja P' o simétrico do ponto P em relação ao plano α.

As coordenadas de P' podem ser obtidas por $I + \overrightarrow{PI}$.

$\overrightarrow{PI} = I - P = (3, 1, 2) - (-3, 4, -1) = (6, -3, 3)$

Assim, $P' = (3, 1, 2) + (6, -3, 3) = (9, -2, 5)$.

8.

8.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 2) - (-2, 5, 0) = (3, -6, 2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3, 2, 8) - (-2, 5, 0) = (5, -3, 8)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor, não nulo, simultaneamente perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, -6, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (5, -3, 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 6b + 2c = 0 \\ 5a - 3b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 6b + 2c = 0 \\ 3b = 5a + 8c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 \times (5a + 8c) + 2c = 0 \\ 3b = 5a + 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 10a - 16c + 2c = 0 \\ 3b = 5a + 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a = 14c \\ 3b = 5a + 8c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 3b = 5 \times (-2c) + 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 3b = -10c + 8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 3b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = \frac{-2c}{3} \end{cases}$$

Seja, por exemplo, $c = -3$: $\vec{n}(6, 2, -3)$

Assim, uma equação cartesiana do plano ABC é da forma $6x + 2y - 3z + d = 0$ e o ponto A de coordenadas $(-2, 5, 0)$ pertence ao plano, logo:

$6 \times (-2) + 2 \times 5 - 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

Uma equação cartesiana do plano ABC é $6x + 2y - 3z + 2 = 0$.

8.2 Opção (D)

Uma vez que o plano β é paralelo à reta BC, isso significa que um vetor normal a β é perpendicular a um vetor diretor da reta BC, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{BC}$, cujas coordenadas são $(2, 3, 6)$ e, portanto, $\vec{n}_\beta . \overrightarrow{BC} = 0$. Além disso, o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ tem de pertencer ao plano. Assim:

(A) $\vec{n}_\beta$ é colinear a $\overrightarrow{BC}$, logo $\vec{n}_\beta . \overrightarrow{BC} \neq 0$.

(B) $\vec{n}_\beta . \overrightarrow{BC} = (3, 2, -2).(2, 3, 6) = 6 + 6 - 12 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ pertence ao plano:

$3 \times (-1) + 2 \times 2 - 2 \times (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$, falso, logo o ponto não pertence ao plano.

(C) $\vec{n}_\beta$ é colinear a $\overrightarrow{BC}$, logo $\vec{n}_\beta . \overrightarrow{BC} \neq 0$.

(D) $\vec{n}_\beta . \overrightarrow{BC} = (-3, -2, 2).(2, 3, 6) = -6 - 6 + 12 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $(-1, 2, -1)$ pertence ao plano:

$-3 \times (-1) - 2 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, verdadeiro, logo o ponto pertence ao plano.

8.3 Sendo $P(x, y, z)$ um qualquer ponto do espaço pertencente à superfície esférica de diâmetro $[AD]$, tem-se que $\overrightarrow{AP} . \overrightarrow{DP} = 0$.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (-2, 5, 0) = (x + 2, y - 5, z)$

$\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y, z) - (3, 5, 2) = (x - 3, y - 5, z - 2)$

Assim:

$\overrightarrow{AP} . \overrightarrow{DP} = 0 \Leftrightarrow (x + 2, y - 5, z).(x - 3, y - 5, z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) + (y - 5)(y - 5) + z(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 + (y - 5)^2 + z^2 - 2z = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + (y-5)^2 + z^2 - 2z = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y-5)^2 + z^2 - 2z + 1^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 6 + \frac{1}{4} + 1$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = \frac{29}{4}$

8.4 $A\hat{B}D = \widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BD}\|}$

Tem-se que:

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \dfrac{30}{7 \times \sqrt{40}}$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{30}{7\times\sqrt{40}}\right)$ e $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}}\right) \approx 47°$.

Cálculos auxiliares

$\overrightarrow{BA} = (-2, 5, 0) - (1, -1, 2) = (-3, 6, -2)$

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\overrightarrow{BD} = (3, 5, 2) - (1, -1, 2) = (2, 6, 0)$

$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = (-3, 6, 2).(2, 6, 0) = -6 + 36 + 0 = 30$

9. As coordenadas do ponto C em função de α são $(3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha)$.

Uma vez que os pontos B e C têm a mesma ordenada, podemos concluir que as coordenadas do ponto B em função de α são $(-3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha)$.

$\overrightarrow{OB} = B - O = (-3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha) - (0,0) = (-3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha)$

$\overrightarrow{OC} = C - O = (3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha) - (0,0) = (3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha)$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (-3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha).(3\cos\alpha, 3\text{sen}\alpha) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow -9\cos^2\alpha + 9\text{sen}^2\alpha = \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -2\cos^2\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, pelo que $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 3$

$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$.

$m_{OC} = \text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$

A reta OC passa pela origem do referencial, pelo que a sua equação reduzida é $y = -\sqrt{3}x$.