TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. **Opção (C)**

A afirmação I é falsa.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cálculos auxiliares
$x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, logo $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{x: x = \frac{7\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A afirmação II é verdadeira.

O contradomínio da função definida por $y = \text{sen}(2x+1)$ é $[-1, 1]$.

O contradomínio da função definida por $y = \text{sen}^2(2x+1)$ é $[0, 1]$.

O contradomínio da função definida por $y = -5\,\text{sen}^2(2x+1)$ é $[-5, 0]$.

O contradomínio da função definida por $y = 4 - 5\,\text{sen}^2(2x+1)$ é $[-1, 4]$.

2. As coordenadas do ponto A, em função de α, são $(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$. Uma vez que o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro da circunferência e que a circunferência está centrada na origem, as coordenadas do ponto C, em função de α, são $(-2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha)$. O ponto B pertence ao semieixo positivo Ox e a reta BC é paralela ao eixo Oy, logo as coordenadas do ponto C, em função de α, são $(-2\cos\alpha, 0)$.

De tudo isto, podemos concluir que $\overline{BC} = 2\,\text{sen}\,\alpha$ e que a altura do triângulo $[ABC]$, em função de α, é igual a $-2\cos\alpha + (-2\cos\alpha) = -4\cos\alpha$.

Seja A a função que define a área do triângulo $[ABC]$ em função de α.

$$A(\alpha) = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha \times (-4\cos\alpha)}{2} = -4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

Para um determinado valor de α, sabe-se que $\text{tg}\,(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}$, isto é, $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$.

$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Assim, $A(\alpha) = -4 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{8}{5}$.

3. $f(x) = 7 \Leftrightarrow \left(2 - \text{sen}(\pi - x)\right)^2 + \text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 7$

$\Leftrightarrow (2 - \text{sen}\, x)^2 + \cos^2 x = 7$

$\Leftrightarrow 4 - 4\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 7$

$\Leftrightarrow 4 - 4\,\text{sen}\, x + 1 = 7$

$\Leftrightarrow -4\,\text{sen}\, x = 2$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$

No intervalo $]-\pi, 0[$:

$\text{sen}\, x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$

C.S. = $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

4. Opção (A)

$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= \vec{u} \cdot \vec{v} - 2 \times \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 =$

$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 =$

$= \sqrt{2} \times 4 \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - 4 + 16 =$

$= -4 - 4 + 16 =$

$= 8$

5. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{BC} = a$.

Como $\overline{BC} = 2\overline{AO}$, então $\overline{AO} = \frac{a}{2}$ e, como $\overline{BC} = \frac{8}{3}\overline{OB}$, então $\overline{OB} = \frac{3a}{8}$.

$\overline{DC} = \overline{OB} = \frac{3a}{8}$

Uma vez que o trapézio $[ABCD]$ tem área 40, tem-se que:

$\frac{(\overline{AO}+\overline{OB})+\overline{DC}}{2} \times \overline{BC} = 40 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{8}\right)+\frac{3a}{8}}{2} \times a = 40$

$\Leftrightarrow \frac{5a}{8} \times a = 40$

$\Leftrightarrow a^2 = 64$

$a \in \mathbb{R}^+$, logo $a = 8$.

Assim:

- $\overline{BC} = \overline{OD} = 8$
- $\overline{AO} = \frac{8}{2} = 4$

- $\overline{OB} = \frac{3\times 8}{8} = 3$
- $\overline{DC} = 3$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}\right) =$$
$$= \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OD} =$$
$$= \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AO}+0+0+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OD} =$$
$$= \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OD} =$$
$$= \|\overrightarrow{DC}\|\times\|\overrightarrow{AO}\|\times\cos 0° + \|\overrightarrow{CB}\|\times\|\overrightarrow{OD}\|\times\cos 180° =$$
$$= 3\times 4\times 1 + 8\times 8\times(-1) =$$
$$= -52$$

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OD} = 0$, pois $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{OD}$. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO} = 0$, pois $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AO}$.

6. $\overrightarrow{NS}\cdot\overrightarrow{NM} = 10 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{NS}\|\times\|\overrightarrow{NM}\|\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 10$
$$\Leftrightarrow 10\,\text{sen}\,\alpha\times 2\times 5\times\text{sen}\,\alpha = 10$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{10}$$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\|\overrightarrow{NS}\|}{2\times 5} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{NS}\| = 10\,\text{sen}\,\alpha$

$$\text{sen}(-\alpha)\times\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\times\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha\times(-\text{sen}\,\alpha)+(-\cos\alpha)\times\cos\alpha =$$
$$= \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha =$$
$$= \text{sen}^2\alpha - (1-\text{sen}^2\alpha) =$$
$$= -1 + 2\,\text{sen}^2\alpha =$$
$$= -1 + 2\times\frac{1}{10} =$$
$$= -\frac{4}{5}$$

7.

7.1 Opção (D)

A reta s é paralela à reta r, pelo que têm o mesmo declive, ou seja, -3 .

Assim, um vetor diretor da reta s deverá ser colinear com o vetor de coordenadas $(1,-3)$.

Apenas as opções (C) e (D) apresentam uma equação vetorial em que o vetor usado é colinear com o vetor de coordenadas $(1,-3)$.

Verifiquemos, agora, em qual das opções o ponto A, de coordenadas $(4,-3)$, verifica as condições apresentadas.

(C) $(4,-3) = (7,4)+k(1,-3)$

$$\begin{cases} 4 = 7+k \\ -3 = 4-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Como os valores de k obtidos são distintos, concluímos que o ponto A não pertence à reta.

(D) $(4,-3) = (6,-9) + k(-1,3)$

$\begin{cases} 4 = 6 - k \\ -3 = -9 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$

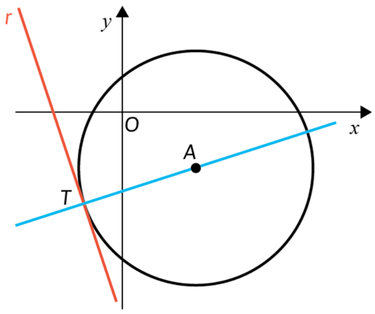
Como os valores de k obtidos são iguais, concluímos que o ponto A pertence à reta.

7.2 Comecemos por definir a equação reduzida da reta perpendicular à reta r e que contém o ponto A:

$m = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + b$

Substituindo na equação da reta anterior x e y pelas coordenadas do ponto A respetivas, obtemos:



$-3 = \frac{1}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -3 - \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{13}{3}$

Assim, a equação reduzida da reta pretendida é $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$.

O ponto de interseção das duas retas corresponderá ao ponto de tangência da circunferência pedida.

Logo:

$$\begin{cases} y = -3x - 11 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -3x - 11 = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -9x - 33 = x - 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 10x = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \times (-2) - 11 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto de tangência são $T(-2,-5)$.

Determinemos, agora, o raio da circunferência, a partir da distância entre os pontos A e T.

$d_{(A,T)} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

A equação reduzida da circunferência de centro no ponto A e que é tangente à reta r é:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 40$$

7.3 B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são $(0,-11)$.

$\overrightarrow{OB} = B - O = (0,-11) - (0,0) = (0,-11)$

$\overrightarrow{OA} = A - O = (4,-3) - (0,0) = (4,-3)$

$\|\overrightarrow{OB}\| = 11$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = (0,-11).(4,-3) = 0 + 33 = 33$

Seja α a amplitude, em graus, do ângulo BOA:

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OA}\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{33}{5\times 11} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{33}{55}$

Assim, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{33}{55}\right) \approx 53°$.

8.

8.1 Opção (B)

Determinemos as coordenadas do ponto A:

A pertence ao eixo Ox, pelo que as suas coordenadas são do tipo $(x, 0, 0)$.

A pertence ao plano ABC, logo, substituindo as suas coordenadas na equação do plano, obtemos $3x + 2 \times 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

As coordenadas do ponto A são $(2, 0, 0)$.

Assim, as coordenadas do ponto médio de $[AD]$ são obtidas por:

$$\left(\frac{2+12}{2}, \frac{0+10}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (7, 5, 2)$$

Como se pretende a equação de um plano paralelo a xOz, que contém o ponto de coordenadas $(7, 5, 2)$, a opção correta é $y = 5$.

8.2 Opção (D)

P é um ponto pertencente ao plano xOz, de abcissa igual à sua cota, pelo que as suas coordenadas serão do tipo $(z, 0, z)$. Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano ABC, obtemos:

$3 \times z + 2 \times 0 + z = 6 \Leftrightarrow 4z = 6 \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$

As coordenadas do ponto P são $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$.

Seja o vetor de coordenadas $(3, 2, 1)$ um vetor normal ao plano ABC e $\vec{n}_\beta$ um vetor normal ao plano apresentado em cada uma das opções. Uma vez que se pretende uma equação de um plano β, perpendicular ao plano ABC, então $\vec{n}_\beta.(3, 2, 1) = 0$. Além disso, o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ tem de pertencer ao plano. Assim:

(A) $\vec{n}_\beta.(3, 2, 1) = (1, -2, 3).(3, 2, 1) = 3 - 4 + 3 \neq 0$

(B) $\vec{n}_\beta$ é colinear a $(3, 2, 1)$, logo $\vec{n}_\beta.(3, 2, 1) \neq 0$.

(C) $\vec{n}_\beta.(3, 2, 1) = (1, -1, -1).(3, 2, 1) = 3 - 2 - 1 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ pertence ao plano:

$\frac{3}{2} - 0 - \frac{3}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, falso

Logo, o ponto não pertence ao plano.

(D) $\vec{n}_\beta.(3,2,1) = (-6,3,12).(3,2,1) = -18 + 6 + 12 = 0$

Verifiquemos se o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ pertence ao plano:

$-6 \times \frac{3}{2} + 3 \times 0 + 12 \times \frac{3}{2} - 9 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, verdadeiro

Logo, o ponto pertence ao plano.

8.3 C pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são do tipo $(0, y, 0)$.

C pertence ao plano ABC, logo, substituindo as suas coordenadas na equação do plano, obtemos:

$3 \times 0 + 2y + 0 = 6 \Leftrightarrow y = 3$

As coordenadas do ponto C são $(0,3,0)$.

$\overrightarrow{CD} = D - C = (12,10,4) - (0,3,0) = (12,7,4)$

$F = B + \overrightarrow{CD} = (3,2,-7) + (12,7,4) = (15,9,-3)$

$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{12^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{209}$

Assim, a equação reduzida da superfície esférica de centro em F e que contém o ponto B é:

$$(x-15)^2 + (y-9)^2 + (z+3)^2 = 209$$

9. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A.

O vetor de coordenadas $(1,-2,1)$ é um vetor normal ao plano α, logo é um vetor diretor de qualquer reta que lhe seja perpendicular.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α, e que contém o centro da superfície esférica de coordenadas $(1,5,3)$, é:

$$(x,y,z) = (1,5,3) + k(1,-2,1), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo $(1+k, 5-2k, 3+k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$$1 + k - 2(5-2k) + (3+k) - 6 = 0 \Leftrightarrow 1 + k - 10 + 4k + 3 + k - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6k = 12$$
$$\Leftrightarrow k = 2$$

Para $k = 2$, obtemos as coordenadas do ponto A: $(1+2, 5-2 \times 2, 3+2) = (3,1,5)$

Logo, 1 é a distância do ponto A ao plano xOz.