TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1.

- $\text{sen}50° = \frac{20}{d_2} \Leftrightarrow d_2 = \frac{20}{\text{sen}50°}$

  Logo, $d_2 \approx 26{,}108$.

- $A\hat{B}D = 180° - 50° = 130°$

  Pela lei dos cossenos, temos que:

  $d_1{}^2 = 15^2 + d_2{}^2 - 2 \times 15 \times d_2 \times \cos 130°$

  Logo:

  $d_1 = \sqrt{15^2 + 26{,}108^2 - 2 \times 15 \times 26{,}108 \times \cos 130°},\ \ d_1 > 0$

  Assim, $d_1 \approx 37{,}551$.

  Temos, então, que $d_1 \approx 37{,}6$ metros e $d_2 \approx 26{,}1$ metros.

1.2. Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{\text{sen}130°}{d_1} = \frac{\text{sen}(A\hat{D}B)}{15}$$

Logo:

$$\text{sen}\left(A\hat{D}B\right) = \frac{15\times\text{sen}130°}{37{,}551} \quad \text{e} \quad A\hat{D}B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{15\times\text{sen}130°}{37{,}551}\right)$$

Ou seja, $A\hat{D}B \approx 17{,}8°$.

2.

2.1. As abcissas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os zeros da função f no intervalo representado.

$f(x) = 0$

$\text{sen}x + \text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = -\text{sen}(2x)$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = \text{sen}(-2x)$

$\Leftrightarrow x = -2x + 2k\pi \ \ \vee \ \ x = \pi - (-2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \ \ \vee \ \ -x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, x = 0 \ \ \vee \ \ x = -\pi$

Para $k = 1, x = \frac{2\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = \pi$

Para $k = 2, x = \frac{4\pi}{3} \ \ \vee \ \ x = 3\pi$

Para $k = 3, x = 2\pi \ \ \vee \ \ x = 5\pi$

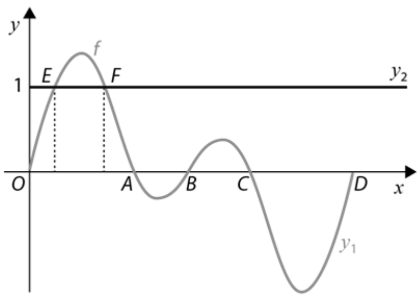
De acordo com estes valores e dadas as condições da figura, podemos concluir que as abcissas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* são, respetivamente, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ e 2π.

2.2. Opção (D)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi - x) + f(\pi + x) = \text{sen}(\pi - x) + \text{sen}\big(2(\pi - x)\big) + \text{sen}(\pi + x) + \text{sen}\big(2(\pi + x)\big) =$$
$$= \text{sen}x + \text{sen}(2\pi - 2x) + (-\text{sen}x) + \text{sen}(2\pi + 2x) =$$
$$= -\text{sen}(2x) + \text{sen}(2x) =$$
$$= 0$$

2.3. $y_1 = \text{sen}x + \text{sen}(2x)$

$y_2 = 1$



$O(0,0)$

$A(2{,}094; 0)$

$E(0{,}355;\ 1)$

$F(1{,}571;\ 1)$

$$A_{[OAFE]} = \frac{\overline{OA} + \overline{EF}}{2} \times 1 = \frac{2{,}094 + (1{,}571 - 0{,}355)}{2} =$$
$$= \frac{3{,}31}{2} =$$
$$= 1{,}66 \text{ u.a.}$$

3. Opção (C)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AH}\right) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} =$$
$$= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}H\right) =$$
$$= -a \times a \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

Cálculo auxiliar

Como ∢ *BAH* é um ângulo inscrito numa circunferência e o arco correspondente *BH* tem amplitude $6 \times \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$, então $B\hat{A}H = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Caderno 2

4.

4.1. Seja $A(\alpha)$ a área do triângulo [*OAB*] em função de α.

Sabemos que:

$$A(\alpha) = \frac{\text{base}\times\text{altura}}{2} = \frac{2\text{sen}\alpha\times\cos\alpha}{2} = \text{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

Como $\text{sen}\alpha = \frac{2}{5}$ e $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos que:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{21}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem que $\cos\alpha > 0$ e, portanto, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Assim, $A(\alpha) = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{25}$.

4.2. Opção (B)

$$B\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Assim, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 6y + 3^2 = 15 + 1^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Assim, $C(1, -3)$.

Como *A* é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo negativo das abcissas, então as coordenadas de *A* são do tipo $(x, 0), x < 0$.

$$(x-1)^2 + (0+3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 + 1 \quad \vee \quad x = -4 + 1$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -3$$

Assim, $A(-3,0)$.

Como a reta t é tangente à circunferência no ponto *A*, então t é perpendicular à reta *AC*.

Como $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3) - (-3,0) = (4, -3)$, tem-se que $m_{AC} = -\frac{3}{4}$, logo $m_t = \frac{4}{3}$.

Assim, a reta t é da forma $y = \frac{4}{3}x + b, b \in \mathbb{R}$.

Como $A(-3,0) \in t$, tem-se que $0 = \frac{4}{3} \times (-3) + b \Leftrightarrow b = 4$.

A equação reduzida da reta t é $y = \frac{4}{3}x + 4$.

6. Opção (D)

Seja n_α um vetor normal ao plano α.

$n_\alpha(1,2,2)$

- Na opção (A) não se encontra uma equação de um plano perpendicular a α, pois $(1,2,2).(-2,1,1) = -2 + 2 + 2 \neq 0$.
- Na opção (B) não se encontra uma equação de um plano perpendicular a α, pois $(1,2,2).(1,-1,-1) = 1 - 2 - 2 \neq 0$.
- Na opção (C), a equação apresentada representa um plano perpendicular a α, pois $(1,2,2).(2,0,-1) = 2 + 0 - 2 = 0$.
- Na opção (D), a equação apresentada também representa um plano perpendicular a α, pois $(1,2,2).(0,-1,1) = 0 - 2 + 2 = 0$.

A opção (C) é excluída, uma vez que o ponto de coordenadas (1, 2, 3) não satisfaz a condição $2x - z = 2$.

Na opção (D) verifica-se que o vetor diretor da reta r e o vetor normal ao plano são perpendiculares, já que $(-2,1,1).(0,-1,1) = 0 - 1 + 1 = 0$. Como o ponto da reta de coordenadas (1, 2, 3) pertence ao plano apresentado (pois $-2 + 3 = 1$ é uma proposição verdadeira), podemos concluir que é na opção (D) que se encontra a equação de um plano que, além de ser perpendicular ao plano α, contém a reta r.

7. Observe-se que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times(-2)\times 2}}{2\times(-2)}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3+5}{-4} \ \vee \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{3-5}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\alpha = -2}_{\text{condição impossível}} \ \vee \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$.

8. Opção (D)

Como o triângulo [*ABC*] é isósceles e $A\hat{C}B = 120°$, então:

$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180°-120°}{2} = 30°$

Seja m o declive da reta BC, então:

$m = \text{tg}(180° - 30°) = \text{tg}(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Assim, um vetor diretor da reta *BC* pode ser o vetor de coordenadas $\left(-3, \sqrt{3}\right)$ (opção (C)) ou $\left(3, -\sqrt{3}\right)$ (opção (D)). No entanto, a opção (C) apresenta a equação vetorial de uma reta de ordenada na origem positiva (1), o que, dadas as condições do enunciado, não é possível.

Observe-se que as opções (A) e (B) estão excluídas, pois na opção (A) encontra-se uma equação de uma reta de declive $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e na opção (B) encontra-se uma equação de uma reta de declive $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.