TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$A_{[ABCO]} = \frac{\overline{AB} + \overline{OC}}{2} \times \overline{BC} = \frac{2\cos\alpha + \cos\alpha}{2} \times \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \frac{3\cos\alpha}{2} \times \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

2. Pretende-se os valores de x tais que $g(x) = 0$:

$$\cos x + \operatorname{sen}x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 + \operatorname{sen}x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ 1 + \operatorname{sen}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \operatorname{sen}x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

3. Opção (B)

A afirmação (I) é falsa.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 3 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$$

Cálculo auxiliar

$$3 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x \neq 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x \neq \sqrt{3} \ \wedge \ \operatorname{tg}x \neq -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \ \wedge \ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

A afirmação (II) é falsa.

Não é verdade que $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

Por exemplo:

$$f(-\pi) = \frac{1}{3 - \operatorname{tg}^2(-\pi)} = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

$$-f(\pi) = -\frac{1}{3 - \operatorname{tg}^2\pi} = -\frac{1}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

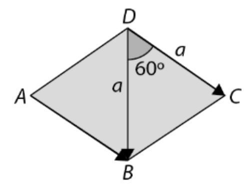
4. Opção (B)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\| \times \cos\left(B\hat{D}C\right) =$$

$$= a \times a \times \cos 60° \qquad (\Delta[BCD] \text{ é equilátero})$$

$$= a^2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}$$



5.

5.1. O lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PA} \, . \, \overrightarrow{PO} = 0$ é a circunferência de diâmetro $[AO]$.

O é a origem do referencial e tem coordenadas (0, 0) e A tem coordenadas $(-5, 0)$, já que é um ponto da circunferência de centro na origem e raio 5 e pertence ao semieixo negativo Ox.

Centro da circunferência = ponto médio de $[AO] = \left(\frac{-5+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

raio $= \frac{5}{2}$

A equação pretendida é $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

5.2. Opção (D)

Sabe-se que a mediatriz de $[AB]$ é uma reta de declive -2, logo a reta AB, que lhe é perpendicular, tem declive $-\frac{1}{-2}$, isto é, $\frac{1}{2}$. Assim, $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Como, também, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como α é a inclinação da reta AB, $\alpha \in [0, \pi[$, e, como $\text{tg}\,\alpha > 0$, então $\alpha \in$ 1.º quadrante, logo $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\alpha > 0$. Assim:

$$\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

5.3. B é o ponto de interseção da reta AB com a circunferência de centro *O* e raio 5 e que se situa no 1.º quadrante.

Reta AB: $y = \frac{1}{2}x + b$

Como $A(-5, 0)$ pertence à reta, tem-se:

$$0 = \frac{1}{2} \times (-5) + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$$

Reta AB: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Circunferência de centro *O* e raio 5: $x^2 + y^2 = 25$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)^2=25 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{10}{4}x+\frac{25}{4}=25 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+10x+25=100 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-15)}}{2\times1} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2\pm8}{2} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2}\times3+\frac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=\frac{1}{2}\times(-5)+\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$$

Como *B* é um ponto do 1.º quadrante, *B* tem coordenadas (3, 4).

6.

6.1. Opção (A)

O plano DCH é paralelo ao plano ABG, logo é definido por uma equação do tipo:

$$-\frac{3}{2}x-y+z+d=0$$

Como o vértice $H(3,8,15)$ pertence ao plano DCH, então:

$-\frac{3}{2}\times3-8+15+d=0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}-\frac{16}{2}+\frac{30}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=-\frac{5}{2}$

Logo, o plano DCH pode ser definido por $-\frac{3}{2}x-y+z-\frac{5}{2}=0$.

6.2. $B\hat{A}H=\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}$

As coordenadas do ponto A são do tipo $(a,0,0)$ e o ponto A pertence ao plano ABG, logo:

$-\frac{3}{2}a-0+0+6=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}a=-6 \Leftrightarrow a=4$

Assim, $A(4,0,0)$.

As coordenadas do ponto B são do tipo $(0,b,0)$ e o ponto B pertence ao plano ABG, logo:

$-\frac{3}{2}\times0-b+0+6=0 \Leftrightarrow -b=-6 \Leftrightarrow b=6$

Assim, $B(0,6,0)$.

Sabemos que $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AH}\|}$.

Tem-se que:

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)=\frac{52}{\sqrt{52}\times\sqrt{290}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)=\frac{52}{2\sqrt{3770}}$

Cálculos auxiliares

$\overrightarrow{AB}=(0,6,0)-(4,0,0)=(-4,6,0)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$

$\overrightarrow{AH}=(3,8,15)-(4,0,0)=(-1,8,15)$

$\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{(-1)^2+8^2+15^2}=\sqrt{1+64+225}=\sqrt{290}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=(-4,6,0).(-1,8,15)=4+48=52$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right) = \dfrac{26}{\sqrt{3770}}$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{26}{\sqrt{3770}}\right)$ e $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right) \approx 65°$.

6.3. Um vetor diretor da reta pretendida é um vetor normal ao plano xOy, por exemplo, o vetor de coordenadas $(0, 0, 1)$.

Determinemos as coordenadas do ponto G:

G é o ponto de interseção da reta GH com o plano ABG.

Comecemos por definir vetorialmente a reta GH:

$$(x, y, z) = (3, 8, 15) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta GH é do tipo$(3 - 3k, 8 - 2k, 15 + 2k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ABG, obtemos:

$$-\frac{3}{2}(3 - 3k) - (8 - 2k) + (15 + 2k) + 6 = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}k - 8 + 2k + 15 + 2k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 + 9k - 16 + 4k + 30 + 4k + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 17k = -17$$

$$\Leftrightarrow k = -1$$

Para $k = -1$, obtemos o ponto de coordenadas $(3 + 3,\ 8 + 2, 15 - 2) = (6, 10, 13)$.

Logo, $G(6, 10, 13)$.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano xOy e que contém o ponto G é:

$$(x, y, z) = (6, 10, 13) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$$

6.4. $B(0, 6, 0)$ e $H(3, 8, 15)$

$P(a^3, 6, a), a \in \text{IR}$

$\overrightarrow{BH} = H - B = (3, 2, 15)$

$\overrightarrow{HP} = P - H = (a^3 - 3, -2, a - 15)$

Para que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{HP}$ tem que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$, isto é:

$$3(a^3 - 3) + 2 \times (-2) + 15 \times (a - 15) = 0 \Leftrightarrow 3a^3 - 9 - 4 + 15a - 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 15a - 238 = 0$$

Introduzindo na calculadora a função $x \mapsto 3x^3 + 15x - 238 = 0$, pretende-se determinar o seu zero.

Assim, $a \approx 3{,}91$.

Como a abcissa do ponto P é a^3, o valor pretendido é, aproximadamente, 59,78.