TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$A(2\cos\alpha,\ 2\text{sen}\,\alpha)$

$2\cos\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 25 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 24$

O ponto B tem coordenadas $\left(1, \frac{6}{5}\right)$ e o ângulo de amplitude β tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$, logo $\text{tg}\,\beta = \frac{6}{5}$, ou seja, $\text{tg}^2\,\beta = \frac{36}{25}$.

Assim, $\text{tg}^2\,\alpha - \text{tg}^2\,\beta = 24 - \frac{36}{25} = \frac{564}{25}$.

2. Seja $x \in [0, 2\pi]$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - x + 2k\pi \ \vee\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $[0, 2\pi]$:

$k = 0 \ \backsim\ x = \frac{5\pi}{18} \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2}\ \left(-\frac{3\pi}{2} \notin [0, 2\pi]\right)$

$k = 1 \ \backsim\ x = \frac{17\pi}{18} \ \vee\ x = \frac{\pi}{2}$

$k = 2 \ \backsim\ x = \frac{29\pi}{18} \ \vee\ x = \frac{5\pi}{2}\ \left(\frac{5\pi}{2} \notin [0, 2\pi]\right)$

As abcissas dos pontos A, B, C e D são, respetivamente, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{18}$ e $\frac{29\pi}{18}$.

3. $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 23 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 23 + 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Seja C o centro da circunferência $C(-1, 1)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta t:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (3, 4) \cdot (x - 2, y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 + 4y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4y = -3x + 26$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{CA} = (2, 5) - (-1, 1) = (3, 4)$
- $\overrightarrow{AP} = (x, y) - (2, 5) = (x - 2, y - 5)$

Seja α a inclinação da reta t: $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$

Então, $\alpha \approx \pi - 0{,}644$, ou seja, $\alpha \approx 2{,}5 \text{ rad}$.

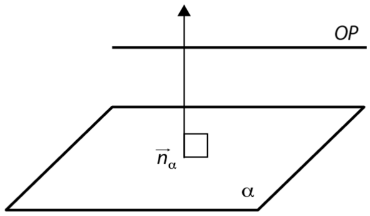
4.

4.1. Opção (A)

$\overrightarrow{OP} = P - O = \left(-2, -1, \frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{n_\alpha}(4, 2, -1)$

$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{n_\alpha}$ são perpendiculares, logo:



$\left(-2, -1, \frac{a}{2}\right) \cdot (4, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow -8 - 2 - \frac{a}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 10$

$\Leftrightarrow a = -20$

4.2. $A(a, 0, 0)$ -----> $4a + 0 - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$B(0, b, 0)$ -----> $0 + 2b - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

$C(0, 0, c)$, com $c < 0$.

$A\hat{B}C = \widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}$

$\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) - (0, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

$\overrightarrow{BC} = (0, 0, c) - (0, -1, 0) = (0, 1, c)$

$$\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{1 + c^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \sqrt{5 + 5c^2}$$

$\Leftrightarrow 16 = 5 + 5c^2$, pois os dois membros da equação anterior são não negativos.

$$\Leftrightarrow 5c^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{11}{5}$$

$$\Leftrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{55}}{5}$$

Como $c < 0$, então $c = -\frac{\sqrt{55}}{5}$. A cota do ponto C é igual a $-\frac{\sqrt{55}}{5}$.

4.3. A equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e raio r é dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Seja T o ponto de tangência.

$OT: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, -1), k \in \mathbb{R}$

$(4k, 2k, -k), k \in \mathbb{R}$ representa um ponto genérico da reta OT.

$4(4k) + 2(2k) - (-k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 16k + 4k + k = -2$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{21}$$

$$T\left(-\frac{8}{21}, -\frac{4}{21}, \frac{2}{21}\right)$$

$$r = \overline{OT} = \sqrt{\left(-\frac{8}{21}\right)^2 + \left(-\frac{4}{21}\right)^2 + \left(\frac{2}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{84}{441}} = \sqrt{\frac{4}{21}}$$

A equação pedida é $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{21}$.

5. Opção (D)

$$u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{-n^3 + 1} = \frac{-1}{-n^3 + 1} = \frac{1}{n^3 - 1}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{n^3 - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$$

6. $u_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{n} = 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Se n é ímpar, $u_n = 3 + \frac{1}{n}$.

$$\frac{118}{39} \leq 3 + \frac{1}{n} < \frac{40}{13} \Leftrightarrow \frac{118}{39} - 3 \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{118}{39} - \frac{117}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - \frac{39}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{13}$$

$$\Leftrightarrow 13 < n \leq 39$$

$n \in \{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$

13 termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{118}{39}, \frac{40}{13}\right[$.

7.

7.1. $f(x) > x \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} > x$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-x^2+2x}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{x-2} > 0$$

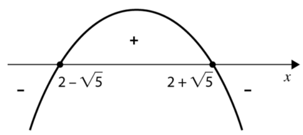
Cálculos auxiliares

$$-x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		2		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$-x^2+4x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x^2+4x+1}{x-2}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$



$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{5} \ \vee \ 2 < x < 2 + \sqrt{5}$$

$\text{C. S.} =]-\infty, 2-\sqrt{5}[\cup]2, 2+\sqrt{5}[$

7.2. $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2x+1}{x-2}+3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+1+3x-6}{(x-2)(x-1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5x-5}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5}{x-2} =$$

$$= \frac{5}{-1} =$$

$$= -5$$

7.3. $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$

Cálculo auxiliar

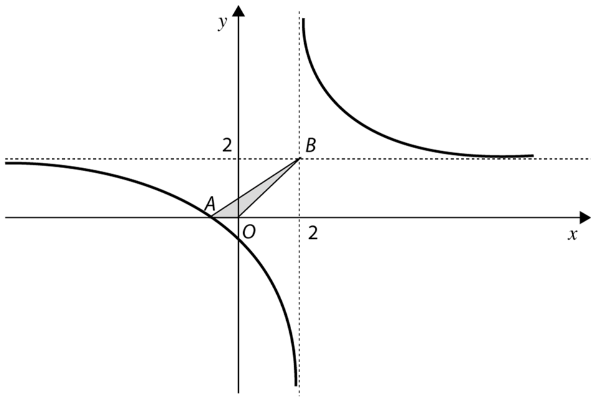
$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x+4 & 2 \\ \hline 5 & \end{array}$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f e a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

$r\colon\ x = 2$

$s\colon\ y = 2$

$B(2, 2)$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \wedge\ x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ \wedge\ x \neq 2$$

$A_{[OAB]} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right| \times 2}{2} = \frac{1}{2}$ u.a.

8.

8.1. Para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ terá que se verificar $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = k$.

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{(x-2)^2}{x^3-8} + \sqrt{5}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right) + \sqrt{5} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2+2x+4} + \sqrt{5} =$

$= \frac{0}{12} + \sqrt{5} =$

$= \sqrt{5}$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5}\right)} =$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como, independentemente do valor de k, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, verifica-se que não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Conclui-se, assim, que não existe valor real k, para o qual exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

8.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x^3-8} + \sqrt{5}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\right) + \sqrt{5} =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{8}{x^3}\right)} + \sqrt{5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{x\left(1-\frac{8}{x^3}\right)} + \sqrt{5} =$$

$$= \frac{1-0+0}{+\infty(1-0)} + \sqrt{5} = \frac{1}{+\infty} + \sqrt{5} =$$

$$= 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\sqrt{5}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\sqrt{5}}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}} =$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{1+0}+0\right)}{1-0} = -1$$

9. Opção (C)

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x^2-2x} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x\,(x-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 10 \;\; (10 \in \mathbb{R})$$

Seja m_t o declive da reta t. Como $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ existe e é finito, tem-se que $m_t = \lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 10$.

Uma reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{m_t}$, ou seja, $-\frac{1}{10}$. Das opções apresentadas, apenas é possível a opção onde se apresenta a equação reduzida $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$.

10.

10.1. Opção (C)

N(0) = 1779

N(1) = 5770,907

$\frac{N(1)-N(0)}{N(0)} = 2{,}243905$

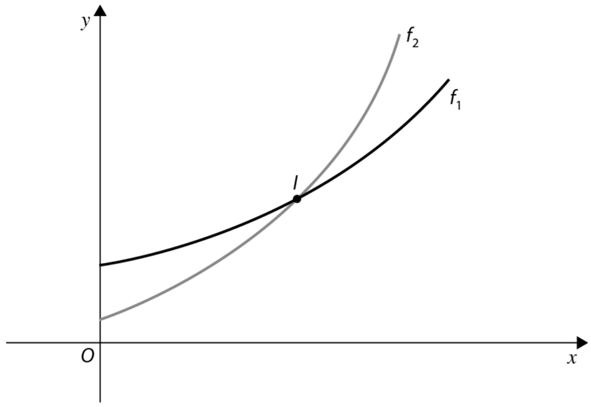
A percentagem de aumento do número de pessoas com telemóvel, no primeiro ano, após o início de 1990, é de, aproximadamente, $224{,}4\%$.

10.2. $N(t+3) = 2N(t),\ 0 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1779\ +\ 3437{,}9(t+3)}{1-0{,}1(t+3)\ +\ 0{,}004(t+3)^2} = 2 \times \frac{1779\ +\ 3437{,}9t}{1\ -\ 0{,}1t\ +\ 0{,}004t^2}, 0 \leq t \leq 6$

Usando a letra x com variável independente:

$f_1(x) = \frac{1779\ +\ 3437{,}9(x+3)}{1 - 0{,}1(x+3) + 0{,}004(x+3)^2}$

$f_2(x) = 2 \times \frac{1779 + 3437{,}9x}{1 - 0{,}1x + 0{,}004x^2}$



$I\ (5{,}185; 66\ 556{,}885)$

$0{,}185 \times 365 \approx 68$

O instante que se pretende determinar corresponde a 5 anos e 68 dias após o início de 1990.