Teste N.º 1 de Matemática A 11.º Ano
Proposta de resolução

1. $\text{tg } 60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{3} \times \overline{ED} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{ED}=\overline{DB}} \overline{CD} = \sqrt{3} \times \overline{DB}$

$\text{tg } 60° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{CB}}{12} \Leftrightarrow \overline{CB} = 12\sqrt{3}$

$\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = \sqrt{3} \times \overline{DB} + \overline{DB} \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = \overline{DB} \times \left(\sqrt{3}+1\right)$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{12\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{12\times 3-12\sqrt{3}}{3-1}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{36-12\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = 18 - 6\sqrt{3}$

$A_{[EDBE']} = \overline{DB}^2 = \left(18-6\sqrt{3}\right)^2 = 324 - 216\sqrt{3} + 108 =$

$= 432 - 216\sqrt{3} =$

$= 216\left(2-\sqrt{3}\right)$

2.

2.1 Opção (A)

$\text{sen}(90° - \beta) + \cos(-\beta) = \cos(\beta) + \cos(\beta) =$

$= 2\cos(\beta) =$

$= 2 \times \frac{4}{5} =$

$= \frac{8}{5}$

Cálculo auxiliar

$\text{tg}(\beta) = -\frac{3}{4}$ e $\text{tg}^2(\beta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\beta)}$

Assim:

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2(\beta)}$

$\Leftrightarrow \cos^2(\beta) = \frac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \cos(\beta) = \pm\frac{4}{5}$

$\beta \in$ 4.º quadrante, pelo que $\cos(\beta) = \frac{4}{5}$.

2.2 $\cos^2(180° - \alpha) - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(-\cos(\alpha)\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{9}$

$90° < \alpha < 180°$, logo $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{4}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{5}{9}$

$90° < \alpha < 180°$, logo $\text{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Seja A' a projeção ortogonal do ponto A sobre o semieixo negativo das abcissas.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AB}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'B}^2$.

Assim:

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{5}{9} + \frac{25}{9} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{30}{9}$$

$\overline{AB} > 0$, logo $\overline{AB} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

3. Opção (C)

$\alpha \in]90°, 180°]$, pelo que, para todo o α pertencente a este intervalo, $-1 \leq \cos(\alpha) < 0$.

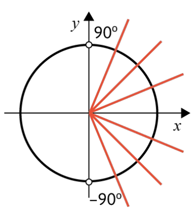
Desta forma:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(\alpha) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \cos^2\alpha \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq -3\cos^2\alpha < 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 2 - 3\cos^2\alpha < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq k < 2 \end{aligned}$$

$k \in [-1, 2[$

4. Opção (C)

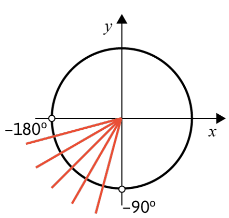
$\alpha \in]-90°, 90°[$



$-1 < \text{sen}(\alpha) < 1$

$0 < \cos(\alpha) \leq 1$

$\beta \in]-180°, -90°[$



$-1 < \text{sen}(\beta) < 0$

$-1 < \cos(\beta) < 0$

$\text{tg}(\beta) > 0$

Opção (A): $\text{sen}\,\alpha - \cos\beta > 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha > \cos\beta$

Falso, para $\alpha = -60°$ e $\beta = -120°$, por exemplo, $\text{sen}\,\alpha < \cos\beta$.

Opção (B): $\text{sen}\,\alpha + \cos\beta < 0$

Falso, para $\alpha = 60°$ e $\beta = -120°$, por exemplo, $\text{sen}\,\alpha + \cos\beta > 0$.

Opção (C): $\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > \operatorname{sen}\beta$

Verdadeiro $\forall\alpha \in]-90°, 90°[\ \wedge \ \beta \in]-180°, -90°[$.

Opção (D): $\cos\alpha \times \operatorname{tg}\beta < 0$

Falso, para $\alpha = 60°$ e $\beta = -120°$, por exemplo, $\cos\alpha \times \operatorname{tg}\beta > 0$

5. Seja α a amplitude do ângulo ao centro AOB e r a medida do raio da circunferência de centro em O e que passa pelos pontos A, B e C.

$$\begin{cases} \alpha r = \frac{10\pi}{3} \\ \frac{\alpha r^2}{2} = 10\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha r = \frac{10\pi}{3} \\ \frac{10\pi}{3} \times \frac{r}{2} = 10\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha r = \frac{10\pi}{3} \\ \frac{r}{6} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha r = \frac{10\pi}{3} \\ r = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \times 6 = \frac{10\pi}{3} \\ r = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{9} \\ r = 6 \end{cases}$$

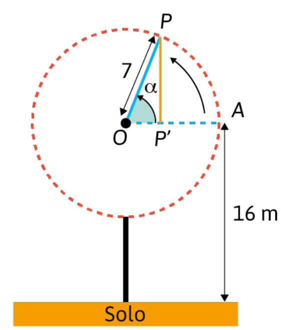
ACB é um ângulo inscrito na circunferência, pelo que a sua amplitude é igual a $\frac{5\pi}{9} \div 2 = \frac{5\pi}{18}$.

6. Opção (D)

Seja P' a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta OA.

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PP'}}{7} \Leftrightarrow \overline{PP'} = 7\operatorname{sen}\alpha$

Assim, $d(\alpha) = 16 + 7\operatorname{sen}\alpha$.



7. A é o ponto pertencente ao gráfico de g de menor ordenada e $\forall x \in]0, 2\pi[, -1 \leq \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \leq 1$, pelo que a ordenada do ponto A é -1.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)\,(2\operatorname{sen}(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \vee 2\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \vee \operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

$x \in \left]0, 2\pi\right[$, logo $x = \pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

B e C têm ordenada positiva, pelo que as suas coordenadas são, respetivamente, $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Assim:

$A_{[ABC]} = \frac{\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$ u.a.

8. $3\cos(-\alpha - \pi) = \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 \times (-\cos(\alpha)) = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) + 5\,\text{tg}(-11\pi + \alpha) + \text{sen}(\alpha - \pi) =$

$= -2\text{sen}(\alpha) + 5\,\text{tg}(\alpha) - \text{sen}(\alpha) =$

$= -3\text{sen}(\alpha) + 5\,\text{tg}(\alpha) =$

$= -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} =$

$= 2 + 2\sqrt{5}$

Cálculo auxiliar

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{5}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \pm\frac{2}{3}$

$\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$ pelo que $\text{sen}(\alpha) = -\frac{2}{3}$.

$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

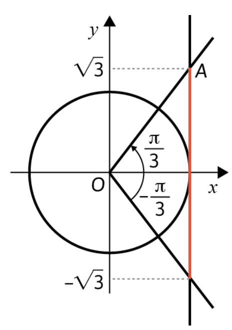
$\Leftrightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. Opção (B)

Recorrendo à circunferência trigonométrica, verificamos que:

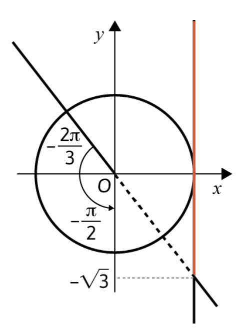
Opção (A):

Se $D = \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$, o contradomínio da função g é $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.



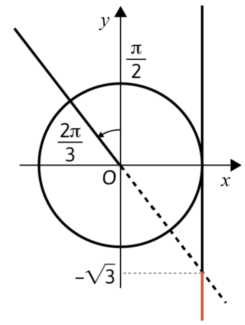
Opção (B):

Se $D = \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$, o contradomínio da função g é $\left]-\sqrt{3}, +\infty\right[$.



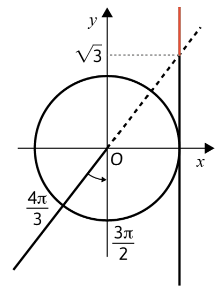
Opção (C):

Se $D = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$, o contradomínio da função g é $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[$.



Opção (D):

Se $D = \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$, o contradomínio da função g é $\left]\sqrt{3}, +\infty\right[$.



10. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(-2x - \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - \left(\sqrt{2}\cos(2x) + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos(2x) - \left(\sqrt{2}\cos(2x) + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{2}\cos(2x) + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos(2x) + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(2x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Os valores de x para os quais a função f se anula são $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

11.

11.1 A área da região sombreada é obtida pela soma da área do setor circular correspondente ao ângulo AOB com a área do trapézio $[OBCD]$.

Comecemos por calcular a área do setor circular correspondente ao ângulo AOB: $A = \frac{\alpha 4^2}{2} = 8\alpha$

A área do trapézio $[OBCD]$ é dada por $A_{[OBCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OD}}{2} \times \overline{CD}$.

As coordenadas do ponto B, em função de α, são $(4\cos\alpha, 4\text{sen}\alpha)$.

De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que:

$\overline{BC} = 2 \times 4\text{sen}\alpha = 8\text{sen}\alpha$

$\overline{OD} = 4\text{sen}\alpha$

$\overline{CD} = -4\cos\alpha$

Assim:

$$A_{[OBCD]} = \frac{8\text{sen}\alpha + 4\text{sen}\alpha}{2} \times (-4\cos\alpha) = 6\text{sen}\alpha \times (-4\cos\alpha) =$$

$$= -24\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

Desta forma, a área da região sombreada é dada, em função de α, pela expressão:

$$8\alpha + (-24\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) = 8\alpha - 24\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

11.2 Calculemos a área de metade do círculo delimitado pela circunferência representada:

$\frac{\pi \times 4^2}{2} = 8\pi$

Pretende-se determinar o valor de α para a qual a área da região sombreada é igual a 8π.

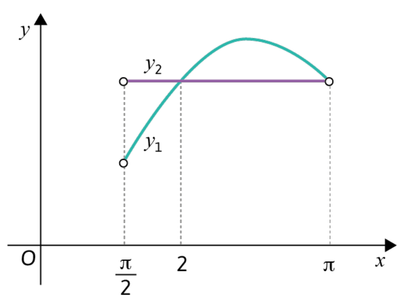
Uma equação que permite determinar esse valor é $8\alpha - 24\text{sen}\alpha\cos\alpha = 8\pi$.

Utilizando x como variável independente, $8x - 24\text{sen}x\cos x = 8\pi$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = 8x - 24\text{sen}x\cos x, \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$y_2 = 8\pi$



O valor de α, com aproximação às unidades, é 2 radianos.