www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

# 6.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

3.º Período    30/05/18    Duração: 100 minutos

Nome:    N.º:

Classificação:    O professor:

**Caderno 1:** 50 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**1.** Dado $a>0$, considere todos os termos do desenvolvimento de $(a-1)^{12}$.

Escolhem-se dois desses termos ao acaso.

Qual é probabilidade de eles terem ambos os coeficientes negativos?

**(A)** $\frac{7}{26}$    **(B)** $\frac{5}{26}$    **(C)** $\frac{5}{52}$    **(D)** $\frac{7}{52}$

**2.** Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{\sqrt{4n^2+k}}$.

**3.** O gestor de uma cadeia hoteleira encomendou um estudo sobre a rentabilidade de cada um dos hotéis dessa cadeia.

Admita que, nesse estudo, se concluiu que o saldo diário, $S$, em euros, de um dos hotéis, em função da sua taxa de ocupação diária, $x$, em percentagem, é dado por

$S(x)=217xe^{-0{,}0125x}-3500$, com $x\in[0,100]$.

Por exemplo, $S(50)$ é o saldo diário desse hotel, correspondente a uma taxa de ocupação diária de $50\%$.

**3.1.** Seja $p$ a taxa média de variação de $S$ entre e $0$ e $20$, em euros por percentagem, arredondado às unidades.

O valor de $p$ é:

**(A)** $157$    **(B)** $163$    **(C)** $169$    **(D)** $175$

**3.2.** Determine, analiticamente, o valor da taxa de ocupação diária para o qual o saldo diário do hotel é máximo.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, época especial de 2016



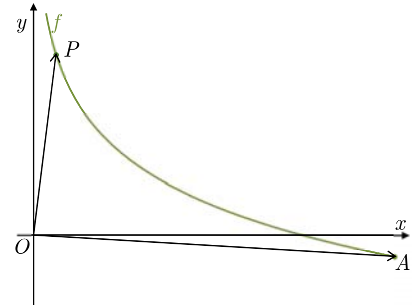


**4.** Considere, ao lado, o gráfico da função, de domínio $]0,4]$, definida por $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x}\right)$.

Considere também o ponto $A$, do gráfico de $f$, de abcissa $4$.

Tal como sugere a figura, existe um ponto $P$ do gráfico de $f$ tal que $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OA}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa $x$ do ponto $P$.



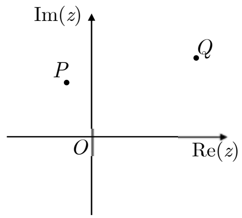

Na sua resposta, deve:

- indicar a ordenada do ponto $A$ com três casas decimais;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- determinar a abcissa do ponto $P$ com três casas decimais.

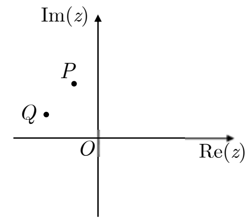
**5.** Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por $f(z)=\bar{z}+3+i$.

**5.1.** Dado um número complexo $w_1$ com afixo $P$ no segundo quadrante, em qual dos planos complexos a seguir podem estar o ponto $P$ e o ponto $Q$, afixo de $f(w_1)$?

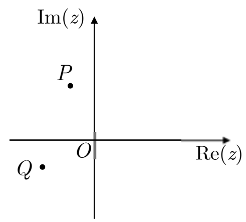
**(A)**



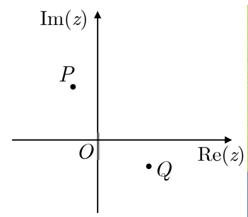

**(B)**

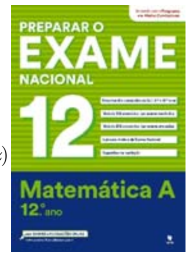



**(C)**




**(D)**



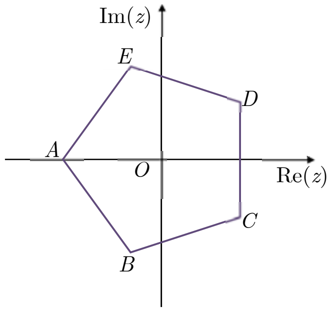

**5.2.** Dado $w_2=\sqrt{3}-3+2i$, determine na forma algébrica, usando processos analíticos: $\left[f(w_2)\right]^8$

**6.** Considere, no plano complexo ao lado, o polígono regular $[ABCDE]$ centrado na origem do referencial.

Os vértices desse polígono são os afixos das $n$ raízes de índice $n$ de um número complexo $z$.

Sabe-se que:

- o vértice $A$ tem coordenadas $(-2,0)$;
- o vértice $B$ é o afixo de um complexo $z_0$.




Dado o complexo $w = 2e^{i\frac{12\pi}{5}}$, qual é a proposição verdadeira?

**(A)** $w = -z_0$ **(B)** $w = z_0$

**(C)** $w = -\overline{z_0}$ **(D)** $w = \overline{z_0}$

**FIM DO CADERNO 1**

COTAÇÕES (Caderno 1)

| Item | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | |
| 1. | 2. | 3.1. | 3.2. | 4. | 5.1. | 5.2. | 6. | |
| 8 | 16 | 8 | 13 | 13 | 8 | 18 | 8 | 92 |





# Formulário

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

## Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

## Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

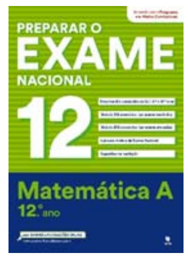
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$



## **Caderno 2:** 50 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**7.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}\ln\left(3e^{-x}+1\right)+x & \text{se } x\leq 4\\ \dfrac{\sqrt{x}-2}{8-2x} & \text{se } x>4\end{cases}$.

Estude o gráfico de $f$ quanto à existência de:

**7.1.** assíntotas verticais;

**7.2.** assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.

**8.** Seja $g$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $g'(x)=8\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\sqrt{3}\,x+5\pi\sqrt{3}$.

**8.1.** Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 6\pi}\frac{g(x)-g(6\pi)}{6\pi-x}$?

**(A)** $8-5\pi\sqrt{3}$ **(B)** $8+5\pi\sqrt{3}$ **(C)** $\pi\sqrt{3}$ **(D)** $-\pi\sqrt{3}$

**8.2.** Estude, no intervalo $[-2\pi,2\pi]$, a função $g$ quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $g$.

**9.** Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w=\frac{3-9i^{21}}{1+2i}$.

**9.1.** Mostre que $w=\sqrt{18}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

**9.2.** Determine o menor valor de $n$ natural para o qual $w^n$ é um número real positivo.

**9.3.** Determine as soluções da equação $z^4=w$.

Apresente-as na forma trigonométrica.





**10.** Mostre que o número complexo $z=\cos\frac{\pi}{10}\left[\cos\frac{\pi}{10}-2i\,\text{sen}\left(-\frac{21\pi}{10}\right)\right]-\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ é unitário.

**FIM DO TESTE**

COTAÇÕES (Caderno 2)

| Item | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | |
| 7.1. | 7.2. | 8.1. | 8.2. | 9.1. | 9.2. | 9.3. | 10. | |
| 13 | 13 | 8 | 16 | 16 | 13 | 16 | 13 | 108 |
| TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2) | | | | | | | | 200 |