www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 11

3.º Período | 01/06/18 | Duração: 100 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Caderno 1: 50 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 15.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de ambos serem superiores a 200?

(A) $\frac{9}{20}$ **(B)** $\frac{11}{20}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{3}{8}$

2. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{9n^2+k}}$.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4x^2+5} & \text{se } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } x>1 \end{cases}$.

Considere o retângulo $[ABCD]$ e a função f no intervalo $[-1,1]$ onde se sabe que:
- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa positiva x;
- o ponto B pertence ao gráfico de f, tem a mesma ordenada de A e abcissa negativa $-x$;
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Ox;
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox;

Sabendo que a área do retângulo $[ABCD]$ é 3, determine x.

Na resolução deste item deve:
- traduzir o problema por uma equação;
- resolver graficamente essa equação, recorrendo à calculadora (não esquecendo de reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que visualizar, incluindo o referencial);
- indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

4. O Aécio fez um salto de *bungee-jumping* a partir da Torre de Macau.

Admita que, t segundos após o Aécio começar o salto, a distância desde o local de onde ele saltou até ao mar foi dada, em metros, pela função definida por

$d(t)=8t-120\ln(t+1)+233$, com $t\in[0,20]$.

4.1. Seja m a taxa média de variação de d, em metros por segundo, nos primeiros dois segundos, arredondado às unidades.

O valor de m é:

(A) 46 **(B)** 52

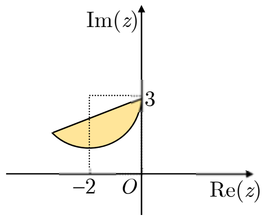
(C) 58 **(D)** 64

4.2. Determine, analiticamente, o tempo (em segundos) que o Aécio demorou a atingir a distância mínima do mar.

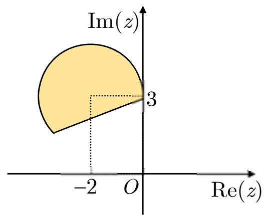
5. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $|z-2+3i|\le 2 \wedge |z|\ge|z-2+5i|$.

Em qual das opções seguintes pode estar, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por essa condição?

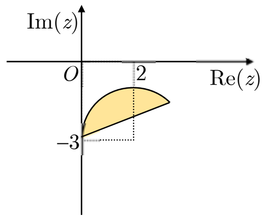
(A)



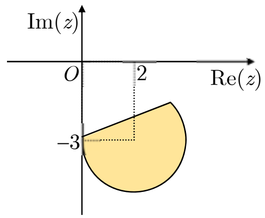
(B)

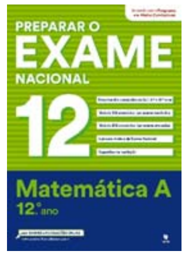


(C)

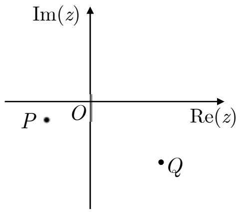


(D)





6. No plano complexo ao lado, está o ponto P, afixo de um número complexo w, e o ponto Q, afixo de $f(w)$, sendo f uma função definida em $\mathbb{C}$.



Qual das seguintes expressões pode representar a função f?

(A) $f(z)=\overline{z}-1+3i$ **(B)** $f(z)=-z-1+3i$

(C) $f(z)=\overline{z}+1-3i$ **(D)** $f(z)=-z+1-3i$

7. Considere, no plano complexo, o ponto $A(-2\sqrt{3},2)$, afixo de um número complexo z.

Usando processos analíticos, determine, na forma algébrica, $\overline{z}^{5}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	
8	16	13	8	13	8	8	18	92

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\ \cos b+\operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

Complexos

$(\rho\operatorname{cis}\theta)^n=\rho^n\operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\operatorname{cis}\theta}=\sqrt[n]{\rho}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Caderno 2: 50 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

8. Considere outra vez a função f do item **3.** definida por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2+5} & \text{se } x\le 1\\ \dfrac{x^2-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } x>1\end{cases}$.

8.1. Estude a continuidade da função f no ponto 1.

8.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua, quando $x\to -\infty$, de equação $y=mx$.
Determine m.

9. Seja g uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $g'(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{3}$.

9.1. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{g(x)-g(3\pi)}{x^2-9\pi^2}$?

(A) $-\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $-\frac{1}{3}$

9.2. Estude, no intervalo $[0,3\pi]$, a função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

• o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;

• o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;

• a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

10. Considere, em $\mathbb{C}$, os números complexos $w_1=\dfrac{2i^{27}-6}{\sqrt{6}\,i}$ e $w_2=w_1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{2}$.

10.1. Mostre que $w_2=\sqrt{8}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

10.2. Determine o(s) valor(es) de α pertencente(s) ao intervalo $]-\pi,\pi[$ de modo que o número $w_2\times e^{i\alpha}$ seja imaginário puro.

10.3. Determine, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas de w_2.

11. Considere o número complexo $z=(i\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Escreva z na forma trigonométrica.

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	10.3.	11.	
13	13	8	16	16	13	16	13	108
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)								200