www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

3.º Período 26/04/18 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Caderno 1: 35 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Sejam t a função, contínua em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $t(x)=\ln(\cos x)$ e $c\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$.
Qual é a proposição verdadeira?

(A) $\pi\cos(c)=\ln 2$ **(B)** $\pi\cos(c)=\sqrt{3}\ln 2$ **(C)** $\operatorname{tg}(c)=\frac{3\ln 2}{\pi}$ **(D)** $\operatorname{tg}(c)=\frac{\sqrt{3}\ln 2}{\pi}$

2. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\log_4(5x)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

2.1. Indique o valor de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

2.2. No intervalo $]0,2[$, sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f num certo ponto P tem declive 2.
Determine a abcissa desse ponto P.
Na resolução deste item deve:
- traduzir o problema por uma equação;
- resolver graficamente essa equação, recorrendo à calculadora (não esquecendo de reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que visualizar, incluindo o referencial);
- indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

3. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que:
- o primeiro termo é 60;
- a razão é $r\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

Sendo $a_n=3$, qual é o valor de n?

(A) $\log_3 r$ **(B)** $-\frac{\ln 20}{\ln r}$ **(C)** $\log_r 60$ **(D)** $1-\frac{\ln 20}{\ln r}$

4. Uma certa massa de Rádio-226 existente numa amostra no instante $t_0=0$ desintegra-se ao longo do tempo, sendo que, em todo o instante t (em anos), a taxa de variação instantânea da massa, $m'(t)$, é proporcional à massa $m(t)$ existente nesse instante.

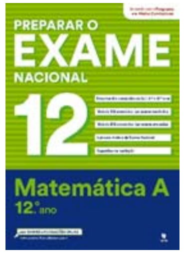
4.1. Sabendo que, ao fim de 1386 anos, a massa de Rádio-226 é igual a metade da massa inicial, mostre que $m(t)\approx m_0e^{-0{,}0005t}$.

4.2. Suponha que a massa de Rádio-226 existente numa amostra é igual a 10 gramas.
Determine, em gramas, a massa dessa amostra após 8 séculos.
Apresente o resultado arredondado às décimas.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	
8	8	16	8	16	11	87



Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Caderno 2: 55 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

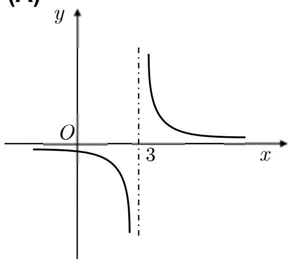
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

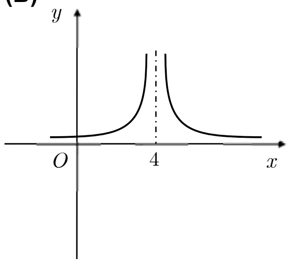
Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

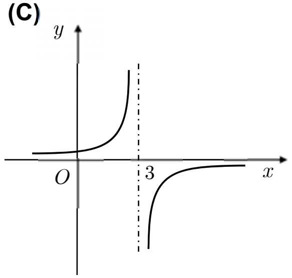
5. Considere todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
Ao escolher um desses números de três algarismos ao acaso, qual é a probabilidade de o produto dos seus algarismos ser um número par?

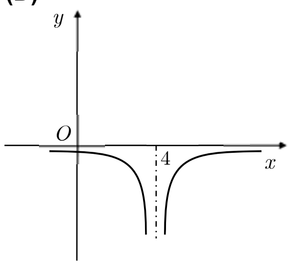
(A) $\frac{{}^9A_3 - {}^5A_3}{{}^9A_3}$ **(B)** $\frac{{}^5A_3 - {}^4A_3}{{}^9A_3}$ **(C)** $\frac{{}^5C_3}{{}^9C_3}$ **(D)** $\frac{{}^4C_3}{{}^9C_3}$

6. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = (n+3)^{\frac{1}{n+3}} + 3$.
De uma certa função h, sabe-se que $\lim h(u_n) = -\infty$.
Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função h?

(A)


(B)


(C)


(D)


7. Considere a função, de domínio $]-\infty, 3[$, definida por $f(x) = \log_5(15-5x) + \log_5 8 \times \log_8 25$.

7.1. Mostre que $f(x) = \log_5(3-x) + 3$.

7.2. Resolva a condição $f(x) \geq \log_5(2x+1) + 4$, apresentando o conjunto solução na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

8. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida pela expressão seguinte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+1}{2} & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(2x+4) - \ln 4}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

8.1. Mostre que f é contínua em 0.
Percorra os seguintes passos:
- verifique que, $\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$;
- usando uma mudança de variável adequada, calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$;
- calcule o limite em falta e conclua o pretendido.

8.2. Considere agora a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + 7x$.
O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua de equação $y = ax$.
Determine a.

9. Seja g uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e tal que $g'(x) = \ln^3(2x) - 4$.

9.1. Sabendo que $\frac{e}{2}$ é um zero da função g, determine uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{e}{2}$.

9.2. Verifique que o gráfico de g não tem pontos de inflexão no seu domínio.

10. Considere a função, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $h(x) = \frac{e^{3x+1}}{x+1}$.

Estude a função h quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função h é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função h é decrescente;
- os valores de x para os quais a função h tem extremos relativos, caso existam.

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.	
8	8	16	16	21	16	11	16	21	113
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									200