www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 11

3.º Período 26/04/18 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

Caderno 1: 35 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que:

- o primeiro termo é 5;
- a razão é $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Sendo $a_n = 60$, qual é o valor de n?

(A) $1+\frac{\ln 12}{\ln r}$ **(B)** $\frac{\ln 12}{\ln r}$ **(C)** $\log_r 60$ **(D)** $1+\log_5 r$

2. O Estêvão ligou o seu novo carregador à eletricidade para carregar a bateria do seu *smartphone*, que se encontrava desligado. No entanto, após um certo tempo, o Estêvão fartou-se de esperar, ligou o *smartphone* e começou a usá-lo (continuando sempre com o carregador ligado à corrente elétrica).

Admita que, t minutos após o Estêvão ter ligado o carregador à eletricidade, a carga da bateria do *smartphone* foi dada, em percentagem, pela função definida por

$$c(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{t-8}-e^4}{t-12} & \text{se } 0\le t<12\\[2ex] e^4\times 1{,}04^{t-12} & \text{se } 12\le t<a\end{cases}\quad , a>12$$

2.1. Justifique que a função c é contínua em 12.

2.2. Qual era a carga da bateria do *smartphone*, arredondado às décimas, quando o Estêvão o ligou à eletricidade?

(A) $3{,}4\%$ **(B)** $4{,}6\%$ **(C)** $34{,}1\%$ **(D)** $54{,}6\%$

2.3. Determine, analiticamente, ao fim de quanto o tempo a bateria ficou com 100% de carga (ou seja, determine o valor de a).

Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, duas casas decimais.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades.

3. Seja g uma função duas vezes diferenciável no domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ e tal que $g'(x)=\frac{e^{1-3x}}{8x+2}+10$.

3.1. Verifique, analiticamente, que o gráfico de g tem apenas um ponto de inflexão no seu domínio e indique a sua abcissa.

3.2. Sabe-se que a função g tem um maximizante em $]-2,0[$.

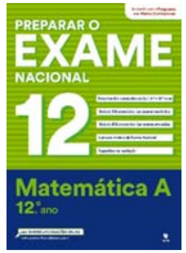
Recorrendo à calculadora gráfica, determine, justificando, a abcissa desse maximizante, arredondado às centésimas.

Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	
8	15	8	15	20	15	81



Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Caderno 2: 55 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

4. São dados um espaço de probabilidades $(E, \mathscr{P}(E), P)$ e $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tais que $P(A) = 0{,}3 = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Indique o valor de $P(\overline{A} \cap B)$.

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}4$ **(D)** $0{,}5$

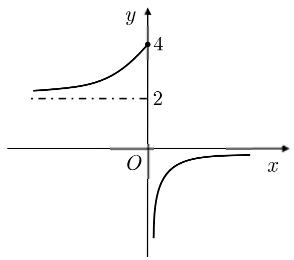
5. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = n^3 e^{-n} - n$.

Ao lado está parte do gráfico da função h, juntamente com as assíntotas ao seu gráfico, de equações $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$.

Qual é o valor de $\lim h(u_n)$?

(A) 2 **(B)** 4

(C) 0 **(D)** $-\infty$



6. A função *f*, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, está definida pela expressão seguinte.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \ln(3-4x)}{5x} & \text{se } x < 0 \\ \left(1 + \frac{x}{5}\right)^{\frac{3}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6.1. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt[5]{e^3}$.

Percorra os seguintes passos:

- verifique que, $\forall x > 0, f(x) = e^{\frac{3\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}}$;
- usando uma mudança de variável adequada, calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}$;
- conclua o pretendido.

6.2. O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.

Determine uma sua equação.

7. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por $h(x) = \ln^2(4-x)$.

7.1. Prove que a função h é monótona no intervalo $]4-e, 3[$.

7.2. Mostre que $\exists^1 c \in]4-e, 3[: h(c) = 0{,}8$.

8. Considere a função, de domínio $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, definida por $f(x) = \log_3(18x+27) + \log_3 5 \times \log_5 27$.

8.1. Mostre que $f(x) = \log_3(2x+3) + 5$.

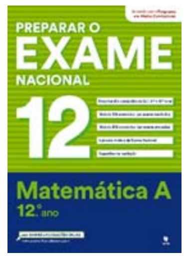
8.2. Resolva a condição $f(x) \leq \log_3(8-x) + 6$, apresentando o conjunto solução na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

8.3. Qual das seguintes representa uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 3?

(A) $(x,y) = (3,14) + k(2, 9\ln 3), k \in \mathbb{R}$ **(B)** $(x,y) = (3,7) + k(2, 9\ln 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y) = (2, \log_3 6) + k(3,7), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x,y) = (2, \log_3 6) + k(3,14), k \in \mathbb{R}$

FIM DO TESTE



COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
4.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	8.3.	
8	8	20	15	15	15	15	15	8	119
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									200