

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

2.º Período

08/03/18

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

Caderno 1: 40 minutos (é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. À partida do super-G masculino do esqui alpino nos Jogos Olímpicos de Inverno de 2018 (Pyeongchang, Coreia do Sul) estavam inscritos 46 atletas europeus e 16 atletas de outros continentes.



Sabe-se que os três primeiros classificados iriam ganhar três medalhas diferentes.

Supondo que todos os inscritos tinham a mesma probabilidade de ganhar qualquer medalha, qual era a probabilidade de os três primeiros serem todos atletas europeus ou todos atletas de fora da europa (na forma de dízima e com três casas decimais)?

- (A) 0,416 (B) 0,069 (C) 0,305 (D) 0,088

2. Sejam $(E, \mathcal{F}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{F}(E)$ tais que:

- $P(B) = \frac{2}{5}$;
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{9}{10}$.

Qual é o valor de $P(A | B)$?

- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. Foi efetuado um depósito de 4000 euros, no regime de juros compostos, a uma certa taxa anual nominal e com capitalizações mensais, obtendo-se um capital acumulado de 4125 euros.

Qual foi, com arredondamento às centésimas, a taxa de juro aplicada?

- (A) 2,85% (B) 2,99% (C) 3,01% (D) 3,08%

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 28 - 3^{1-x}$.

- 4.1. Mostre que a equação $f(x) = e^3$ é possível em $] -1, 0[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às milésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a equação $f(x) = e^3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $] -1, 0[$;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

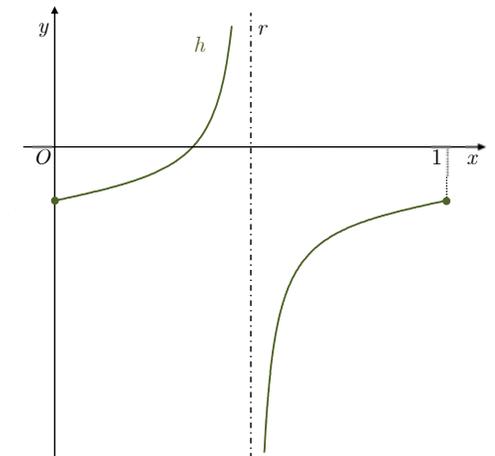
- 4.2. Determine, analiticamente, o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq 28 - \sqrt[5]{81}$.

5. Considere, no referencial cartesiano do lado, o gráfico da função, de domínio $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, definida por $h(x) = \text{tg}(\pi x) - 2$.

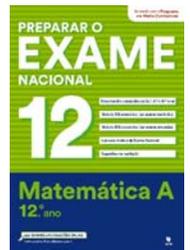
- 5.1. Calcule, justificando:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{h(x)}{e^{1-2x} - 1}$$

- 5.2. Mostre que o gráfico de h não admite nenhuma reta tangente paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.



FIM DO CADERNO 1



COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	
8	8	8	18	13	13	13	81

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Caderno 2: 50 minutos (não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Indique o valor de $\lim \left(1 - \frac{4}{5n^2 + 2n + 4}\right)^{2n-1}$.

- (A) 0 (B) $e^{-\frac{4}{5}}$ (C) e^{-4} (D) 1

7. Considere a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{2x+6}}{3x+9} & \text{se } x < -3 \\ 8 - x^2 e^{-2x-6} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

7.1. Estude a continuidade da função f no ponto -3 .

7.2. O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.
Determine a sua equação reduzida.

8. Uma partícula desloca-se sobre o eixo das abcissas de tal forma que a sua abcissa é dada, após t segundos, por $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \varphi\right)$ metros, com $\varphi \in [0, 2\pi[$.

8.1. Qual é a frequência deste oscilador harmónico?

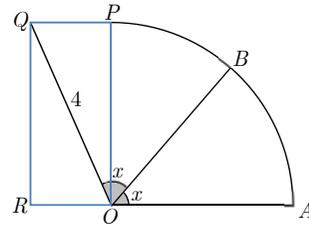
- (A) $\frac{2}{\pi}$ (B) $\frac{10}{\pi}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$

8.2. Sabe-se que, após 2 segundos, a abcissa da partícula é igual a 5 metros.
Determine φ .



9. Relativamente à figura do lado, sabe-se que:

- os pontos A , B e P pertencem ao quarto de circunferência de centro O ;
- $\overline{OQ} = 4$;
- os ângulos BOA e QOB são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude x ($x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$).



Seja A a função que dá a área do retângulo $[OPQR]$.

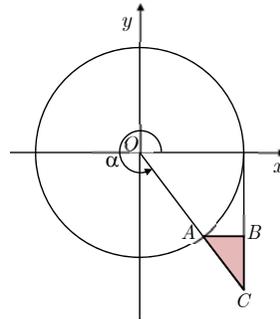
9.1. Mostre que $A(x) = -8\text{sen}(4x)$.

9.2. Determine o valor de x que maximiza a área do retângulo $[OPQR]$.

10. Na figura junta estão representados a circunferência trigonométrica e o triângulo $[ABC]$, retângulo em B .

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência trigonométrica e ao quarto quadrante;
- a reta BC tem equação $x = 1$;
- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta OA ;
- $\alpha \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$.



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{4\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(2\alpha) - 2\text{tg}(\alpha)}{4}$.

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
6.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	10.		
8	18	18	8	13	18	18	18		119
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									200