www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 11

2.º Período 08/03/18 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

Caderno 1: 40 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. As catorze jogadoras da seleção portuguesa de futsal (incluindo cinco do Benfica) ficaram lado a lado para uma fotografia antes de iniciar o jogo contra a Ucrânia (em fevereiro de 2018).

De quantas maneiras era possível dispô-las sem haver atletas do Benfica juntas?

(A) $5! \times {}^{14}A_5$ **(B)** $5! \times {}^{14}C_5$ **(C)** $30\,240 \times 9!$ **(D)** $252 \times 9!$

2. Cada cartão da multinacional Torten fornecido aos clientes é constituído por um código com três letras (de entre as 23 usuais) e cinco algarismos, como se pode ver no exemplo ao lado.

Ao escolher um código da Torten ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter todas as letras diferentes (na forma de dízima e com três casas decimais)?

(A) $0{,}988$ **(B)** $0{,}873$ **(C)** $0{,}742$ **(D)** $0{,}146$

3. Foi efetuado um depósito de 7000 euros, no regime de juros compostos, a uma certa taxa anual nominal e com capitalizações trimestrais, obtendo-se um capital acumulado de 7178 euros.

Qual foi, com arredondamento às centésimas, a taxa de juro aplicada?

(A) $2{,}52\%$ **(B)** $2{,}55\%$ **(C)** $2{,}58\%$ **(D)** $2{,}61\%$

4. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas respetivamente por

$f(x) = 4 \times 2^{-x}$ e $g(x) = \dfrac{x^4}{f(x)}$

4.1. Mostre que g admite um máximo absoluto a e um mínimo absoluto b no intervalo $[-8,-3]$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine o valor de $a-b$, arredondado às centésimas.

Na sua resposta:
- recorra ao teorema de Weierstrass para provar que g admite um máximo e um mínimo absolutos;
- reproduza, num referencial, o gráfico da função que visualizar na calculadora, devidamente identificado;
- apresente os valores de a e de b com arredondamento às milésimas;
- apresente o valor pedido.

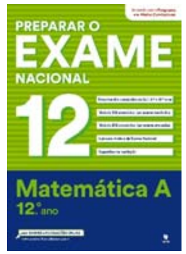
4.2. Determine, analiticamente, o conjunto-solução da inequação $f(x) - \sqrt[3]{128} > 0$.

5. Considere a função, de domínio $[0,2\pi] \setminus \{\pi\}$, definida por $h(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

5.1. Seja (a_n) a sucessão de números reais tal que $a_n = \pi e^{\frac{1}{n}}$.
Determine $\lim h(a_n)$.

5.2. Mostre, analiticamente, que h é crescente em $[0,\pi[$.

FIM DO CADERNO 1



COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	
8	8	8	18	13	13	13	81

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\ \cos b+\operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Caderno 2: 50 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Indique o valor de $\lim\left(1-\frac{8}{4n^2+5}\right)^{6-2n^2}$.

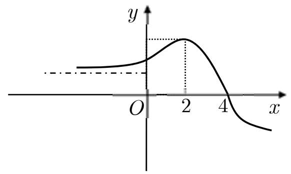
(A) e^4 **(B)** 1 **(C)** e^{-8} **(D)** 0

7. Seja g uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que:

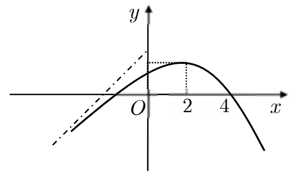
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=1$;
- $g'(2)=0 \wedge g''(2)<0$;
- $x\in]4,+\infty[\Rightarrow g''(x)>0$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função g.

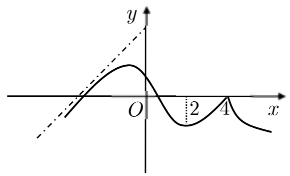
I)



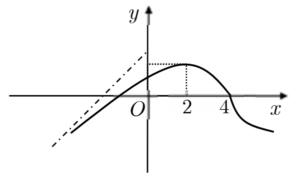
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar g.
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

8. Considere, para um certo número real k, a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-3)e^{2x-2}-4 & \text{se } x\le 1\\[2mm] \dfrac{e^{3x-3}-1}{2x-2}+k & \text{se } x>1\end{cases}.$$

8.1. Determine k de modo que a função f seja contínua em 1.

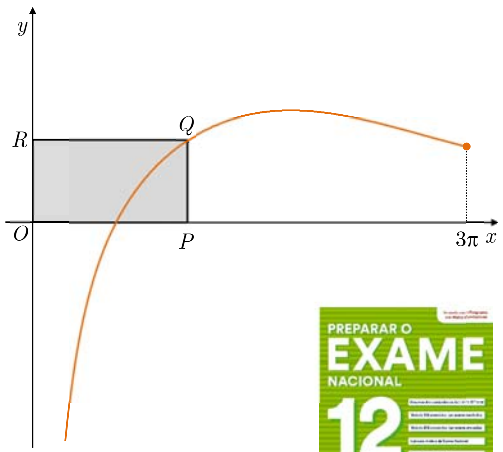
8.2. O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.
Determine a sua equação reduzida.

9. Uma partícula desloca-se sobre o eixo das abcissas de tal forma que a sua abcissa é dada, após t segundos, por $x(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{10}+\frac{\pi}{2}\right)$ centímetros.
Qual é a frequência deste oscilador harmónico?

(A) $\frac{10}{\pi}$ **(B)** $\frac{2}{\pi}$ **(C)** $\frac{1}{20}$ **(D)** $\frac{1}{10}$

10. Considere a função, diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$.

Na figura junta está parte do gráfico de f em $]0,3\pi]$.

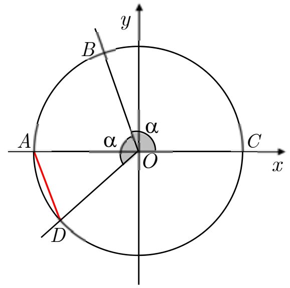


Considere que o ponto P, de abcissa pertencente ao intervalo $[\pi,3\pi]$, se desloca ao longo do gráfico da função f; para cada posição do ponto P, considere o retângulo $[OPQR]$, em que o ponto Q pertence ao gráfico de f e tem a mesma abcissa de P e o ponto R pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de Q.

10.1. Seja A a função, de domínio $[\pi,3\pi]$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do retângulo $[OPQR]$.
Mostre que $A'(x)=\dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}}{4}$.

10.2. Determine a abcissa do ponto P que maximiza a área do retângulo $[OPQR]$.

11. Considere a circunferência trigonométrica e os pontos A, B, C e D representados na figura junta.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-1,0)$;
- o ponto B pertence à circunferência e ao segundo quadrante;
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto D pertence à circunferência e ao terceiro quadrante;
- os ângulos BOC e BOD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[\right)$

Mostre que $\overline{AD}=2|\cos\alpha|$.

Fim do Teste

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
6.	7.	8.1.	8.2.	9.	10.1.	10.2.	11.	
8	13	18	18	8	18	18	18	119
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)								200