



### 3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

2.º Período 01/02/18

Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação:    O professor:

#### Caderno 1: 45 minutos (é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Uma empresa de construção de malas atribui, ao acaso, um código secreto a cada mala que comercializa.

Cada código secreto é formado por 6 algarismos, por uma certa ordem.

Quantos códigos diferentes existem com exatamente dois zeros e com os outros algarismos todos diferentes?

- (A) 1890 (B) 18 144 (C) 45 360 (D) 85 274

2. Considere a função, de domínio  $] -\infty, 4]$ , definida por  $f(x) = \sqrt{16 - 4x}$ .

2.1. Justifique que  $\exists c \in ] -5, 0[ : f'(c) = \frac{f(0) - f(-5)}{5}$ .

2.2. Utilizando métodos analíticos, determine o valor de  $c$  referido na alínea anterior.

3. Um ponto  $P$  desloca-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa, em metros, é dada, após  $t$  segundos, por  $x(t) = t^3 - 5t^2 + 5$ .

3.1. Determine, em metros por segundo:

3.1.1. a velocidade média do ponto  $P$  nos primeiros quatro segundos;

3.1.2. a velocidade do ponto  $P$  no instante  $t = 6$ .

3.2. Usando processos analíticos, calcule a abcissa mínima do ponto  $P$ . Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

4. Considere a função, de domínio  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , definida por  $g(x) = \frac{1 + \sin(3x)}{2 - \cos(x)}$ .

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo  $[ABC]$ , onde:

- $A$  é o ponto do gráfico de  $g$  cuja ordenada é máxima;
- $B$  é o ponto de interseção do gráfico de  $g$  com a reta de equação  $y = 0,8$ ;
- $C$  é o ponto do eixo  $Ox$  com a mesma abcissa que  $B$ .

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo  $[ABC]$ ;
- indicar as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$ , com três casas decimais;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

FIM DO CADERNO 1

#### COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.1.	2.2.	3.1.1.	3.1.2.	3.2.	4.	
8	11	22	11	11	22	17	102

#### Formulário

##### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

##### Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

##### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

**Caderno 2: 45 minutos**  
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

5. Numa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a razão entre o terceiro e o segundo elementos é igual a 47.

Qual é essa linha?

- (A) 92                      (B) 93                      (C) 94                      (D) 95

6. De um baralho de cartas, seleccionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes).

Escolhem-se, ao acaso, duas dessas cartas.

Considere os acontecimentos:

$V$ : «Pelo menos uma das cartas escolhidas é um valete.»

$D$ : «Somente uma das cartas escolhidas é uma dama.»

Qual é o valor de  $P(D | \bar{V})$ ?

- (A)  $\frac{4 \times 8}{{}^{12}A_2}$                       (B)  $\frac{4 \times 8}{{}^{16}C_2}$                       (C)  $\frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times 2$                       (D)  $\frac{4}{16} \times \frac{8}{15}$

7. Seja  $f$  uma função duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$  e tal que  $f'(x) = \frac{x^2}{x+4}$ .

- 7.1. Sabendo que o ponto  $A(4, -3)$  pertence ao gráfico de  $f$ , qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $A$ ?

- (A)  $y = 2x + 7$                       (B)  $y = 2x - 11$                       (C)  $y = -\frac{4}{3}x + 7$                       (D)  $y = -\frac{4}{3}x - 11$

- 7.2. Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$ .

8. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $h(x) = \frac{\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x)}{x}$ .

Sabe-se que  $y = b$  é a equação da única assíntota ao gráfico de  $h$ .

Qual é a proposição verdadeira?

- (A)  $h(x) = \frac{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} \wedge b = 2$                       (B)  $h(x) = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} \wedge b = 2$   
(C)  $h(x) = \frac{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} \wedge b = 0$                       (D)  $h(x) = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} \wedge b = 0$

9. Considere, para um certo número real  $k$ , a função, de domínio  $]2 - \pi, +\infty[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-8}{\sin(2-x)} & \text{se } 2 - \pi < x < 2 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + k & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine  $k$  de modo que a função  $f$  seja contínua em 2.

10. Resolva, em  $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ , a equação  $2\sin(4x) - \cos(4x) - 2\sin^2(2x) = 0$ .

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.	10.	
8	8	8	22	8	22	22	98
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							200