



### 3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 11

2.º Período 01/02/18

Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

#### Caderno 1: 45 minutos (é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Com as letras da palavra ACASACADO, quantas palavras com ou sem sentido existem?  
 (A) 3780 (B) 7560 (C) 15 120 (D) 30 240

2. Considere o desenvolvimento de  $(x + \frac{3}{x^3})^{16}$ ,  $x \neq 0$ .

Quanto ao termo independente desse desenvolvimento:

- (A) Não existe; (B) É igual a 1 061 424;  
 (C) É igual a 15 120; (D) É igual a 147 420.

3. Considere a função, de domínio  $[-6, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \sqrt{2x + 12}$ .

3.1. Justifique que  $\exists c \in ]-6, 0[$ :  $f'(c) = \frac{f(0) - f(-6)}{6}$ .

3.2. Utilizando métodos analíticos, determine o valor de  $c$  referido na alínea anterior.

4. Um ponto  $P$  desloca-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa, em metros, é dada, após  $t$  segundos, por  $x(t) = 10 + 32t - t^4$ .

4.1. Determine, em metros por segundo, a velocidade média do ponto  $P$  nos primeiros três segundos.

4.2. Usando processos analíticos, calcule, em metros, a abcissa máxima do ponto  $P$ .

5. Considere a função, de domínio  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , definida por  $g(x) = \frac{\cos(3x) + 2}{\sin(x) + 2}$ .

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo  $[ABC]$ , onde:

- $A$  é o ponto de interseção do gráfico de  $g$  com a reta de equação  $y = 1,1$ ;
- $B$  é o ponto do gráfico de  $g$  cuja ordenada é mínima;
- $C$  é o ponto do eixo  $Ox$  com a mesma abcissa que  $B$ .

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo  $[ABC]$ ;
- indicar a abcissa do ponto  $A$  com três casas decimais;
- indicar as coordenadas do ponto  $B$  com três casas decimais;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

#### FIM DO CADERNO 1

#### COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	
8	8	11	22	11	22	17	99

#### Formulário

##### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

##### Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

##### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

**Caderno 2: 45 minutos**  
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. A Perpétua e o Damião estão a divertir-se na festa do seu casamento, com 110 convidados.

Sabe-se que:

- 80 dos convidados são amigos da noiva;
- 50 dos convidados são amigos do noivo.

Escolhem-se, ao acaso, dois dos convidados.

Qual é a probabilidade de ambos serem amigos de apenas um dos noivos?

- (A)  $\frac{80}{110} \times \frac{50}{109} \times \frac{20}{108}$     (B)  $\frac{80}{110} \times \frac{50}{109}$     (C)  $\frac{80C_2 + 50C_2}{110C_2}$     (D)  $\frac{60C_2 + 30C_2}{110C_2}$

7. Seja  $f$  uma função duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  e tal que  $f'(x) = \frac{x^2}{x-2}$ .

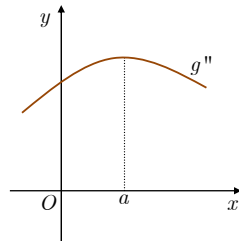
Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$ .

8. No referencial o.n.  $xOy$  da figura, encontra-se representada parte da função  $g''$ , segunda derivada de  $g$ , duas vezes diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

Sabendo que  $g'(a) = 0$ , qual é a proposição verdadeira?

- (A)  $a$  é a abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de  $g$ .  
 (B)  $g(a) = 0$ .  
 (C)  $g(a)$  é um máximo local de  $g$ .  
 (D)  $g(a)$  é um mínimo local de  $g$ .



9. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = 4\text{sen}\left(\frac{x}{20}\right)\cos\left(\frac{x}{20}\right)$ .

Qual das expressões seguintes define também a função  $h$  ?

- (A)  $\text{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$     (B)  $\cos\left(\frac{x}{20}\right)$     (C)  $2\text{sen}\left(\frac{x}{10}\right)$     (D)  $2\cos\left(\frac{x}{10}\right)$

10. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x+3)}{2x^2+6x} & \text{se } x < -3 \\ \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{6} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

10.1. Estude a continuidade da função  $f$  no ponto  $-3$ .

10.2. Estude o gráfico da função  $f$  quanto à existência de assíntota horizontal quando  $x \rightarrow -\infty$ .

11. Resolva, em  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ , a equação  $2\cos(6x) + \cos(12x) + 2\text{sen}^2(6x) = 0$ .

**FIM DO TESTE**

**COTAÇÕES (Caderno 2)**

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	7.	8.	9.	10.1.	10.2.	11.	
8	22	8	8	22	11	22	101
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							200