www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

1.º Período | 07/12/17 | Duração: 90 minutos

Nome: | N.º:

Classificação: , | O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

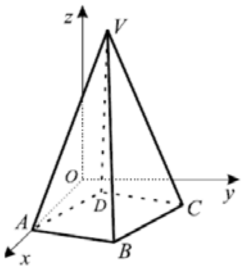
- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy.

Escolhem-se, ao acaso, dois vértices dessa pirâmide.

Qual é a probabilidade de esses dois vértices definirem uma reta paralela ao plano de equação $z=-2$?



(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{3}{10}$ **(D)** $\frac{7}{10}$

Adaptado do 1.º teste intermédio do 11.º ano de 2010

2. Segundo os números divulgados pela Secretaria Regional de Educação da RAM sobre o número de professores do ensino não superior no ano letivo de 2015/16, sabe-se que:

- $32{,}8\%$ deles tinham menos de 40 anos;
- de entre os professores com menos de 40 anos, $34{,}5\%$ eram professores do 3.º ciclo e secundário;
- de entre os professores com 40 ou mais anos, $51{,}8\%$ eram professores do 3.º ciclo e secundário.

Ao escolher, ao acaso, um professor desse estudo, qual é a probabilidade de ele ser do 3.º ciclo e secundário (na forma de dízima e arredondada às centésimas)?

(A) $0{,}18$ **(B)** $0{,}38$ **(C)** $0{,}46$ **(D)** $0{,}86$

3. Sejam $(E, \mathscr{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tais que:

- $P(A)=0{,}1$;
- B e $\overline{B}$ são acontecimentos equiprováveis;
- $A \subset B$.

Qual é o valor de $P(A \mid (A \cup \overline{B}))$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

4. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que:

- $\lim a_n = -\infty$;
- $b_n \geq \frac{2n-a_n}{4}$ a partir da ordem 30.

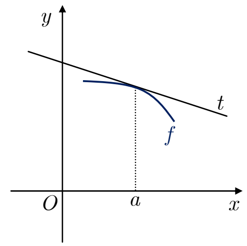
Qual é o valor de $\lim b_n$?

(A) 0 **(B)** $-\infty$ **(C)** $+\infty$ **(D)** 30

5. No referencial o.n. xOy da figura estão representados:

- parte do gráfico da função definida por $f(x)=k-x^3, k>0$;
- a reta tangente num ponto $a>0$ do seu domínio e de declive m.

Sabendo que $m=-a$, qual é o valor de a?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

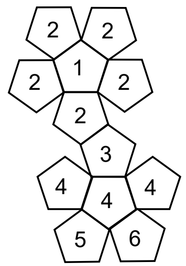
Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Ao lado está a planificação de um dado dodecaédrico equilibrado.

Lança-se esse dado uma vez e observa-se a face que fica virada para cima.



Considere os acontecimentos:

A: «Sair face com um divisor de 4.»

B: «Sair face com um número primo.»

Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

2. **2.1.** Sejam $(E, \mathscr{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tais que:

• B é um acontecimento possível;

• $P(\overline{A}) = 2P(B)$.

Prove que

$$P(A \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cup B)}{P(B)} - 2$$

2.2. A Jerónima tem vários CD de música. Ela sabe que:

• 70% dos CD são de música rock;

• 15% dos CD são de conjuntos portugueses;

• 6% dos CD não são de música rock mas são de conjuntos portugueses.

A Jerónima escolhe, ao acaso, um dos seus CD.

Qual é a probabilidade de ele ser:

2.2.1. de um conjunto português se não for de música rock?

2.2.2. de música rock se for de um conjunto português?

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.**. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

3. Considere duas caixas 1 e 2, ambas com bolas distinguíveis apenas pela cor e tais que:

• a caixa 1 tem sete bolas azuis, três vermelhas e duas brancas;

• a caixa 2 tem quatro bolas azuis e três vermelhas.

3.1. Retiram-se todas as bolas da caixa 1, uma a uma, e colocam-se em fila, pela ordem de saída.

Determine a probabilidade de as bolas de cada cor ficarem juntas.

3.2. Considere agora a seguinte experiência: *ao acaso, tiram-se quatro bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente quatro bolas da caixa 2*.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «As bolas retiradas da caixa 1 são de cores diferentes.»

B: «Apenas uma das bolas retiradas da caixa 2 tem cor vermelha.»

Determine o valor de $P(B \mid \overline{A})$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

A sua composição deve contemplar:

• o significado de $P(B \mid \overline{A})$, no contexto da situação descrita;

• a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A;

• a explicação do número de casos possíveis;

• a explicação do número de casos favoráveis;

• a apresentação do valor da probabilidade pedida na forma de fração irredutível.

4. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule $\lim \frac{-3n^2 - \cos^2 n}{5 - 7n^2}$.

5. Considere as funções f e g de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definidas por

$f(x) = 3 - 8x^3 - x^4$ e $g(x) = \frac{f(x)}{x-3}$.

Resolva os itens seguintes usando processos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:

• o(s) intervalo(s) em que a função f é crescente;

• o(s) intervalo(s) em que a função f é decrescente;

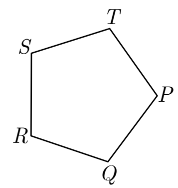
• os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos, caso existam.

5.2. Mostre que a equação $g(x) = 2$ é possível em $]0,1[$.

5.3. Calcule $\lim\limits_{x \to 3^+} \left[g(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3} \right) \right]$.

6. Resolva <u>o item **6.1.** ou o item **6.2.**</u>.

6.1. Considere o pentágono $[PQRST]$ da figura.



Considere ainda outros n pontos do pentágono (além dos vértices).

Escolhem-se, ao acaso, três pontos.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «Os três pontos escolhidos estão entre os $n+5$.»

B : «O ponto P foi escolhido.»

Sabendo que $P(\overline{B} \mid A) = \frac{49}{50}$, determine, sem usar a calculadora, o valor de n.

6.2. Mostre que $\lim \left(\frac{2n+k}{3n} \right)^n = 0$, $k \in]0,1[$.

Sugestão: Utilize o teorema das sucessões enquadradas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	**1.**................**12**	**2.**................**44** **2.1.**......16 **2.2.1.**...12 **2.2.2.**...16	**3.**................**32** **3.1.**.....16 **3.2.**.....16	**4.**................**16**	**5.**................**40** **5.1.**.....16 **5.2.**.....12 **5.3.**.....12	**6.**................**16**