www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 11

1.º Período 07/12/17 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

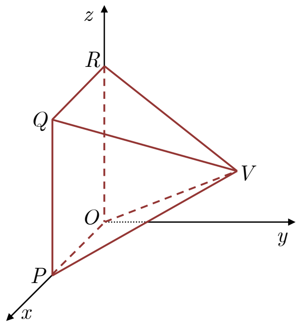
- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[OPQRV]$ cuja base está contida no plano xOz.

Escolhem-se, ao acaso, três vértices dessa pirâmide.

Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano não paralelo ao plano de equação $y = -2$?



(A) $\frac{3}{5}$ **(B)** $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{3}{10}$ **(D)** $\frac{7}{10}$

2. De uma turma do ensino secundário, sabe-se que:

- 15% dos alunos usam relógio de pulso;
- de entre os alunos com relógio de pulso, 25% são rapazes;
- de entre os alunos sem relógio de pulso, $46{,}2\%$ são rapazes.

Ao escolher, ao acaso, um aluno dessa turma, qual é a probabilidade de ele ser rapaz (na forma de dízima e arredondada às centésimas)?

(A) $0{,}41$ **(B)** $0{,}43$ **(C)** $0{,}53$ **(D)** $0{,}91$

3. Sejam $(E, \mathscr{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tais que:

- $P(A) = P(B) = 0{,}3$;
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P\left((A \cup B) \mid \overline{B}\right)$?

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

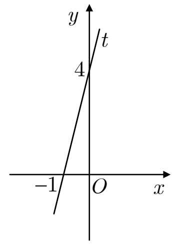
4. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que:

- $\lim a_n = +\infty$;
- $b_n \leq -\frac{5n+a_n}{3}$ a partir da ordem 20.

Qual é o valor de $\lim b_n$?

(A) 20 **(B)** 0 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

5. No referencial o.n. xOy da figura está representada a reta t, tangente ao gráfico de uma função f no ponto 0 e, tal como se pode constatar por essa figura, t interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o eixo Oy no ponto de ordenada 4.



Qual das seguintes pode representar uma expressão da função f?

(A) $x^4 + 2x^2 + 4x$ **(B)** $x^4 + 4x + 4$

(C) $4x^5 + 2x$ **(D)** $4x^5 + 2x + 4$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. De 6 a 12 de novembro de 2017 disputou-se o XX Open Internacional de Bridge da Madeira, com quase quatro centenas de jogadores, 60 dos quais portugueses.

Redija, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo de probabilidade, inventado por si, que admita como resposta correta

$$\frac{{}^{326}C_4 + {}^{60}C_2 \times {}^{326}C_2}{{}^{386}C_4}$$

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de jogadores que participou no Open;
- a experiência aleatória;
- o acontecimento cuja probabilidade pretende que seja calculada (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

2. **2.1.** Sejam $(E, \mathscr{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tais que:

- $0 < P(A) < 1$;
- $P(B) = 2P(A)$.

Prove que

$$P(B \mid A) = \frac{3P(A) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) - 1}{P(A)}$$

2.2. Sobre os frequentadores do bar OLHÓCOPO, sabe-se que:

- 90% gosta de futebol;
- 45% gosta de comer bifanas;
- 60% não gosta de futebol ou não gosta de comer bifanas.

Escolhe-se, ao acaso, um frequentador do bar OLHÓCOPO.

Qual é a probabilidade de ele gostar de futebol se gostar de comer bifanas?

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.**. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

3. Dividiu-se um baralho de cartas completo em dois montes 1 e 2, tais que:

- o monte 1 tem treze cartas do naipe de espadas e treze cartas do naipe de paus, cada naipe com um ás e três figuras (todas as cartas são diferentes);
- o monte 2 tem treze cartas de copas e treze de ouros, seis das quais figuras diferentes.

3.1. Extrai-se, ao acaso, uma carta do monte 1.

Considere os acontecimentos:

A : «Sair uma figura.»

B : «Sair uma carta de espadas.»

Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

3.2. Extraem-se agora, ao acaso, dez cartas do monte 1, uma a uma, e colocam-se em fila, pela ordem de saída.

Determine a probabilidade de as únicas figuras serem as três primeiras cartas.

3.3. Considere agora a seguinte experiência: *ao acaso, tiram-se três cartas do monte 1 e colocam-se no monte 2; em seguida, tiram-se simultaneamente três cartas do monte 2*.

Sejam C e D os acontecimentos:

C: «As cartas retiradas do monte 1 são figuras.»

D: «As cartas retiradas do monte 2 são figuras.»

Determine, sem usar a fórmula da probabilidade condicionada, o valor de $P(\overline{D} \mid C)$.
Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(\overline{D} \mid C)$ no contexto da situação descrita.

4. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule $\lim \frac{5n^3 - \text{sen}^2 n}{3 - 4n^3}$.

5. Considere as funções f e g de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definidas por

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2$ e $g(x) = \frac{f(x)}{x+2}$.

Resolva os itens seguintes usando processos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função f é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função f é decrescente;
- os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos, caso existam.

5.2. Mostre que a equação $g(x) = 10$ é possível em $]0, 5[$.

5.3. Calcule $\lim\limits_{x \to -2^-} \left[g(x) + \cos\left(\frac{1}{x+2}\right) \right]$.

6. Resolva <u>o item **6.1.** ou o item **6.2.**</u>.

6.1. Considere o tabuleiro horizontal da figura, com as casas numeradas de 1 a 6.

1	2	3	4	5	6	…

Acrescentam-se ao tabuleiro outras n casas.

Pretende-se colocar, ao acaso, três peças iguais no tabuleiro (cada casa comporta apenas uma peça).

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «As três peças são para ser colocadas nas $n+6$ casas.»

B : «A casa 1 fica vazia.»

Sabendo que $P(B \mid A) = \frac{43}{44}$, determine, sem usar a calculadora, o valor de n.

6.2. De uma função g, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $g(0) = 2$;
- $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Mostre que a função definida por $h(x) = g(x) + 3x$ tem pelo menos um zero em $[-1, 0]$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	**1.**...............**12**	**2.**...............**32**	**3.**...............**44**	**4.**...............**16**	**5.**...............**40**	**6.**...............**16**
		2.1......16 **2.2.**.....16	**3.1.**.....12 **3.2.**.....16 **3.3.**.....16		**5.1.**.....16 **5.2.**.....12 **5.3.**.....12	