www.esffranco.edu.pt
(2017/2018)

1.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

1.º Período 02/11/17 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma turma de 12.º ano é constituída por 10 raparigas 5 rapazes.

1.1. Escolhem-se 3 quaisquer alunos da turma.
Qual é a probabilidade de serem todos rapazes?

(A) $\frac{14}{75}$ **(B)** $\frac{1}{75}$ **(C)** $\frac{12}{91}$ **(D)** $\frac{2}{91}$

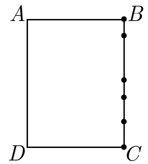
1.2. Sabe-se que pelo menos 2 dos alunos da turma vão fazer a viagem de fim de curso.
Quantas maneiras diferentes existem de os alunos dessa turma irem a essa viagem?

(A) 5005 **(B)** 6435 **(C)** $32\ 752$ **(D)** $32\ 767$

2. Roger Federer e Rafael Nadal são dois dos melhores tenistas da atualidade e já se defrontaram por 38 vezes, tendo Nadal ganho 23 vezes o confronto entre os dois.
De quantas maneiras poderia Rafael Nadal ter vencido Roger Federer 23 vezes consecutivas?

(A) 16 **(B)** 18 **(C)** $16!$ **(D)** $18!$

3. Na figura encontra-se o retângulo $[ABCD]$.
Como se pode observar, no lado $[BC]$ estão assinalados 6 pontos.
Usando n pontos do lado $[AD]$ e os 6 pontos assinalados de $[BC]$, quantos triângulos têm 2 vértices do lado $[AD]$ e 1 vértice do lado $[BC]$?



(A) $6n^2 - 3n$ **(B)** $3n^2 - 3n$

(C) $n^3 - 6$ **(D)** $n^3 - 3$

4. Numa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que o 10.º e o 25.º elementos são iguais.
Ao escolher um elemento ao acaso dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser um número superior a 1000?

(A) $\frac{8}{17}$ **(B)** $\frac{14}{17}$ **(C)** $\frac{6}{35}$ **(D)** $\frac{29}{35}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Determine o coeficiente do termo em x^{14} do desenvolvimento de $\left(\frac{4}{x} - x^2\right)^{13}$, $x \neq 0$.

2. O responsável por uma banca de jornais vai colocar no exterior um exemplar de cada um dos 7 jornais e 5 de revistas que vende, todos lado a lado.

2.1. De quantas maneiras diferentes pode o responsável colocar os jornais juntos e as revistas também juntas?

2.2. Suponha agora que o responsável coloca os 12 exemplares ao acaso no exterior.
Determine a probabilidade de:

2.2.1. os exemplares começarem e terminarem com uma revista;

2.2.2. não haver revistas juntas.

3. Cada cartão da multinacional Torten fornecido aos clientes é constituído por um código com três letras (de entre as 23 usuais) e cinco algarismos, como se pode ver no exemplo ao lado.

3.1. Quantos códigos diferentes pode haver se todas as letras forem vogais e o número superior a $30\ 000$?

3.2. Escolhe-se um código ao acaso.

Qual é a probabilidade de esse código ter apenas duas letras G e ser formado por algarismos diferentes?

Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

4. Considere nove bolas, indistinguíveis ao tato, colocadas num saco vazio: quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

4.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas desse saco.

Calcule a probabilidade de o produto dos números das duas bolas retiradas ser o maior possível.

4.2. Considere agora que se juntam ao saco cinco bolas numeradas com o número 8.

Considere ainda que se extraem, simultaneamente e ao acaso, seis bolas do saco.

4.2.1. Mostre que existem 3003 maneiras de essa extração acontecer.

4.2.2. Determine a probabilidade de haver apenas duas bolas com o número 1.

4.2.3. Determine a probabilidade de haver, pelo menos, quatro bolas com o número 8.

Adaptado do exame nacional de Matemática A, 1.ª fase de 2016

5. A Medalha Internacional de Descobrimentos Proeminentes em Matemática (mais conhecida por Medalha Fields) é um prémio concedido, a cada quatro anos, a alguns jovens matemáticos (com, no máximo, 40 anos de idade).

Até 2014, foram distribuídas 56 Medalhas Fields, sendo 4 em cada 7 dadas a matemáticos europeus.

Um jovem estudante tem todas as fotografias desses matemáticos e pretende colocar 3 delas no seu quarto.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidas as 3 fotografias, de forma a que pelo menos duas delas sejam de matemáticos europeus?

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: ${}^{56}C_3 - {}^{24}C_3 - 32 \times {}^{24}C_2$ Resposta II: ${}^{32}C_2 + {}^{32}C_3$

Apenas uma das respostas está correta. Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorreta, de modo a torná-la correta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

6. Resolva, usando processos analíticos, o item **6.1.** ou o item **6.2.**.

6.1. Considere, num universo U, os subconjuntos A, B e C tais que:

- A e B são disjuntos;
- $C \subset B$.

Utilizando as propriedades das operações sobre conjuntos, mostre que:

$$\overline{\overline{A} \cap C} \cap \overline{B} = \overline{B}$$

6.2. Resolva, para $n \geq 6$, a equação $\dfrac{{}^{n+2}A_8}{4!} = 3960 \times {}^{n+2}C_6$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)					
1.................**17**	**2.**................**38** **2.1.**......10 **2.2.1.**...14 **2.2.2.**...14	**3.**................**24** **3.1.**.....10 **3.2.**.....14	**4.**................**50** **4.1.**.....14 **4.2.1.**.10 **4.2.2.**.12 **4.2.3.**.14	**5.**...............**14**	**6.**...............**17**