Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr $(\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $(r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ $(r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $(r - \text{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. Dispõe-se de quinze carateres (os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de cinco carateres.

1.1. Quantos códigos se podem formar com carateres todos diferentes, constituídos por três vogais e dois algarismos, não necessariamente por esta ordem?

(A) $125\,000$ **(B)** $54\,000$ **(C)** $12\,500$ **(D)** 5400

1.2. Escolheu-se, ao acaso, um código, de entre todos os códigos de cinco carateres, repetidos ou não, que é possível formar com os quinze carateres.

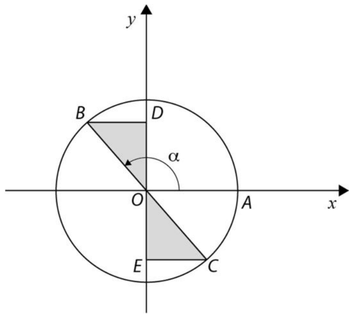
Determine a probabilidade de esse código ser constituído por cinco algarismos diferentes cuja soma seja um número superior a 33.

Apresente o resultado com cinco casas decimais.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- $[BC]$ é um diâmetro da circunferência trigonométrica;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy;
- as retas BD e EC são paralelas ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



2.1. Sabe-se que, aumentando em 1 radiano um determinado valor de α, o perímetro da região a sombreado na figura diminui 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- mostre que o perímetro da região a sombreado na figura é dado, em função de α, por $f(\alpha) = 2(1 + \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)$;
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α, em radianos, com aproximação às centésimas.

2.2. Considere agora a função real de variável real g definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = 2(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)$$

2.2.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $g'(0)$.

2.2.2. Seja t a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{3}$.

Qual é a inclinação da reta t, em graus, com aproximação às unidades?

(A) $36°$ **(B)** $70°$ **(C)** $110°$ **(D)** $144°$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}\ -\ 1} & \text{se} \quad x < 0 \\ k^2 - 5k + 4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{2x}{x+5} - 2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

3.1. Em qual das opções seguintes se encontra um valor real de k para o qual a função f é contínua?

(A) -2 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4

3.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

3.3. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, mostre que a função f é crescente no intervalo $]0, +\infty[$.

4. De uma escola de Ensino Básico e Secundário, sabe-se que todos os seus alunos almoçam nas instalações da escola: uns optam pelo menu da cantina e os restantes trazem almoço de casa.

Sabe-se ainda que:

- 70% dos alunos frequentam o Ensino Secundário;
- 2 em cada 10 alunos que frequentam o Ensino Secundário almoçam todos os dias na cantina;
- um sexto dos alunos que frequentam o Ensino Básico opta por trazer o almoço de casa todos os dias.

Escolheu-se ao acaso um dos alunos desta escola para participar num debate.

Qual é a probabilidade de ter sido escolhido um aluno que frequenta o Ensino Básico ou que almoce na cantina, mas não ambos? Apresente o resultado na forma de percentagem.

5. Seja f a função definida por $f(x) = \cos^2 x - 2\text{sen}\, x$.

5.1. Para qualquer valor real de x, $f(\pi + x) + f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$ é igual a:

(A) $1 + 2\text{sen}\, x + 2\cos x$ **(B)** $-1 + 2\text{sen}\, x + 2\cos x$

(C) $1 - 2\text{sen}\, x - 2\cos x$ **(D)** $-1 - 2\text{sen}\, x - 2\cos x$

5.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

6. De duas funções reais de variável real f e g, sabe-se que:

- f é definida por $f(x) = \frac{1}{x}$;
- o ponto de coordenadas $(2, -3)$ pertence ao gráfico de g;
- a tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2 é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual é o valor de $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{36}$ **(D)** $\frac{5}{36}$

7. Seja f uma função contínua e bijetiva, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $f^{-1}(x) = f(x)$;
- para um certo número real a, tem-se $f(a) < a$.

Mostre que a equação $f(x) = x$ é possível no intervalo $]f^{-1}(a), a[$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.1**	**2.2.2**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**Total**
8	20	20	20	8	8	20	20	20	8	20	8	20	**200**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

${}^5C_3$ é o número de maneiras distintas de escolher as posições que as três vogais vão ocupar de entre os cinco lugares disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^5A_3$ modos diferentes de escolher três vogais, de entre cinco, e de as colocar ordenadamente. E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}A_2$ modos diferentes de escolher dois algarismos de entre dez e de os colocar ordenadamente.

Assim, ${}^5C_3 \times {}^5A_3 \times {}^{10}A_2 = 54\,000$ é o número de códigos pedido.

1.2. Número de casos possíveis: ${}^{15}A'_5$

${}^{15}A'_5$ é o número de códigos de cinco carateres, repetidos ou não, que é possível formar com 15 carateres.

Número de casos favoráveis: $5! + 5!$

Sabemos que 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35 e 9 + 8 + 7 + 6 + 4 = 34, logo, para que o código seja constituído por cinco algarismos diferentes cuja soma seja um número superior a 33, existem apenas dois casos mutuamente exclusivos: ou o código é constituído pelos algarismos 9, 8, 7, 6 e 5 ou o código é constituído pelos algarismos 9, 8, 7, 6 e 4.

5! é o número de códigos diferentes que existem permutando os algarismos 9, 8, 7, 6 e 5 e analogamente 5! é o número de códigos diferentes que existem permutando os algarismos 9, 8, 7, 6 e 4.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{5!+5!}{{}^{15}A'_5} = \frac{240}{759\,375} \approx 0,00032$.

2.

2.1. $f(\alpha) = 2\left(\overline{OB} + \overline{OD} + \overline{BD}\right) = 2\left(1 + \operatorname{sen}\alpha + (-\cos\alpha)\right) = 2(1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$

$\downarrow$

Observe-se que, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos\alpha < 0$. Logo, $\overline{BD} = -\cos\alpha$.

Sabe-se que, para um determinado valor de α, $f(\alpha + 1) = f(\alpha) - 0{,}25 \times f(\alpha)$, isto é, $f(\alpha + 1) = 0{,}75 \times f(\alpha)$.

Pretende–se, então, resolver a equação:

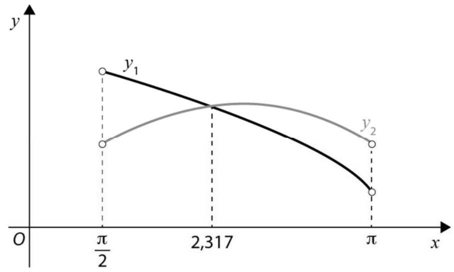
$2(1 + \operatorname{sen}(\alpha + 1) - \cos(\alpha + 1)) = 0{,}75 \times 2(1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$y_1 = 2(1 + \text{sen}(x+1) - \cos(x+1))$

$y_2 = 0{,}75 \times 2(1 + \text{sen}x - \cos x)$

Assim, $\alpha \approx 2{,}32$ rad.



2.2.

2.2.1. $g'(0) = \lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{2(1+\text{sen}x-\cos x)-0}{x} =$

$= 2\left(\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x+\text{sen}x}{x}\right)$

Cálculo auxiliar

$g(0) = 2(1 + \text{sen}0 - \cos 0) =$

$= 2(1 + 0 - 1) =$

$= 0$

Como:

- $\underbrace{\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}}_{\text{indeterminação } \left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to0} \frac{\text{sen}x}{1+\cos x} =$

$= 1 \times \frac{0}{1+1} =$

$= 0$

- $\underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} = 1$

Tem-se que:

$2\left(\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x+\text{sen}x}{x}\right) = 2\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} + 2\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}x}{x} =$

$= 2 \times 0 + 2 \times 1 =$

$= 2$

Assim, $g'(0) = 2$.

2.2.2. Opção (D)

$m_t = g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= 1 - \sqrt{3} < 0$

Cálculo auxiliar

$g'(x) = \left(2(1 + \text{sen}x - \cos x)\right)' =$

$= 2(0 + \cos x + \text{sen}x) =$

$= 2(\cos x + \text{sen}x)$

A inclinação da reta t é o ângulo α, compreendido entre $90°$ e $180°$ (já que o declive da reta é negativo), tal que $\text{tg}\alpha = 1 - \sqrt{3}$. Recorrendo à calculadora, $\text{tg}^{-1}(1 - \sqrt{3}) \approx -36°$, logo a inclinação da reta t é $-36° + 180° = 144°$.

3.

3.1. Opção (C)

Para a função f ser contínua em $x = 0$ tem que se verificar $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $f(0) = k^2 - 5k + 4$

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-x}\ -\ 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x})^2-1^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{1-x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{-x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} -\left(\sqrt{1-x}+1\right) =$$
$$= -\left(\sqrt{1-0}+1\right) =$$
$$= -2$$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right) = \frac{0}{5} - 2 = -2$

Assim, $f(0) = -2$. Logo:

$$k^2 - 5k + 4 = -2 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 1\times 6}}{2\times 1}$$
$$\Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = 3$$

Das opções apresentadas, apenas a (C) satisfaz esta condição.

3.2. $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

- $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x}-1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x})^2-1^2} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{1-x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} -(\sqrt{1-x}+1) =$$
$$= -(+\infty) =$$
$$= -\infty$$

Como b não é um número real, conclui-se que o gráfico de f não apresenta assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$.

• $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{2x}{x+5} - 2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x+5} - \frac{2}{x}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} - 2\right) =$$

$$= \frac{2}{1+0} - 2 =$$

$$= 0$$

Como $m = 0$ e $b = 0$, conclui-se que a reta de equação $y = 0$ é assíntota não vertical, em particular, é assíntota horizontal ao gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

3.3. Em $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right)' = \frac{(2x)' \times (x+5) - 2x \times (x+5)'}{(x+5)^2} - 0 = \frac{2(x+5) - 2x \times 1}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{10}{(x+5)^2} > 0$$

Como $f'(x) > 0, \forall x \in \,]0, +\infty[$, conclui-se que f é crescente em $]0, +\infty[$.

4. Sejam S e C os acontecimentos:

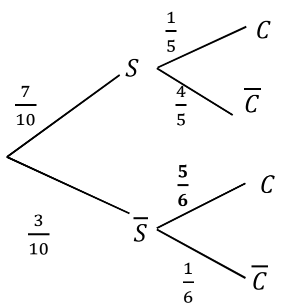
S: "o aluno é do Ensino Secundário"

C: "o aluno almoça diariamente na cantina"

Sabe-se que:

- $P(S) = \frac{7}{10}$
- $P(C|S) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(\overline{C}|\overline{S}) = \frac{1}{6}$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{S} \cup C) - P(\overline{S} \cap C)$:



$$P(S \cap C) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{50}$$

$$P(S \cap \overline{C}) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{50}$$

$$P(\overline{S} \cap C) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P(\overline{S} \cap \overline{C}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$$

$$P(C) = \frac{7}{50} + \frac{1}{4} = \frac{39}{100}$$

Assim:

$P(\overline{S} \cup C) - P(\overline{S} \cap C) = P(\overline{S}) + P(C) - P(\overline{S} \cap C) - P(\overline{S} \cap C) =$

$= \frac{3}{10} + \frac{39}{100} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$

$= \frac{19}{100}$

A probabilidade pretendida é, então, 19%.

5.

5.1. Opção (A)

$f(\pi + x) + f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^2(\pi + x) - 2\text{sen}(\pi + x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$= \cos^2 x - 2(-\text{sen}x) + \text{sen}^2 x - 2(-\cos x) =$

$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + 2\cos x =$

$= 1 + 2\text{sen}x + 2\cos x$

5.2. $f(x) = \cos^2 x - 2\text{sen}x$

$f'(x) = 2 \times \cos x \times (\cos x)' - 2\cos x = -2\cos x \times \text{sen}x - 2\cos x =$

$= -\text{sen}(2x) - 2\cos x$

$f''(x) = -2\cos(2x) + 2\text{sen}x$

$f''(x) = 0$

$-2\cos(2x) + 2\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x = 2\cos(2x)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$, o zero de f'' é $\frac{\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$
Sinal de f''		$-$	0	$+$	
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P.I.	$\cup$	

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} =$

$= \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

No intervalo $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$.

6. Opção (D)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)\times g(2) - f(2)\times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{-\frac{1}{4}\times(-3) - \frac{1}{2}\times(-1)}{(-3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{9} =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{9} =$$

$$= \frac{5}{36}$$

Cálculos auxiliares

- $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $f'(2) = -\frac{1}{4}$
- $g'(2) = -1$, pois $g'(2)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$ e esta reta é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares, cujo declive é 1.

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

- g é contínua, por se tratar da diferença de duas funções contínuas (f e $x \mapsto x$, função polinomial). Em particular, g é contínua em $[f^{-1}(a), a]$.
- $g\left(f^{-1}(a)\right) = \underbrace{f\left(f^{-1}(a)\right)}_{=a} - \underbrace{f^{-1}(a)}_{f(a)} = a - f(a) > 0$, pois $a > f(a)$.

  $g(a) = f(a) - a < 0$, pois $f(a) < a$.

  $g(a) < 0 < g\left(f^{-1}(a)\right)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]f^{-1}(a), a\right[: g(c) = 0$$

ou seja:

$$\exists c \in \left]f^{-1}(a), a\right[: f(c) - c = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \left]f^{-1}(a), a\right[: f(c) = c$$

Provámos, assim, que a equação $f(x) = x$ é possível no intervalo $\left]f^{-1}(a), a\right[$.