Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de teste de avaliação [março – 2019]

Porto Editora

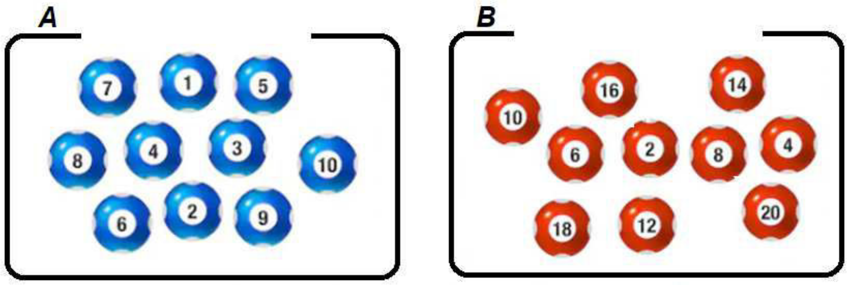
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Na figura estão representadas duas caixas *A* e *B* com bolas numeradas.



A **caixa A** tem 10 bolas numeradas de 1 a 10.

A **caixa B** tem 10 bolas numeradas com os números pares de 2 a 20.

Algumas bolas foram transferidas da caixa *B* para a caixa *A*.

De seguida, ao acaso, foram retiradas da caixa *A* duas bolas.

Considera os acontecimentos:

***R*:** "A soma dos números das bolas retiradas é um número ímpar."

***S*:** "As duas bolas têm número par."

Sabe-se que os acontecimentos *R* e *S* são equiprováveis, ou seja, $P(R)=P(S)$.

Determina o número de bolas transferidas da caixa *B* para a caixa *A*.

2. Sejam f e g funções reais de domínio, respetivamente, $\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ e $\mathbb{R}$, sendo $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\mathrm{e}^x$.

Designando por h a função composta $g \circ f$, sabe-se que o contradomínio de h é um intervalo do tipo $[a,b]$.

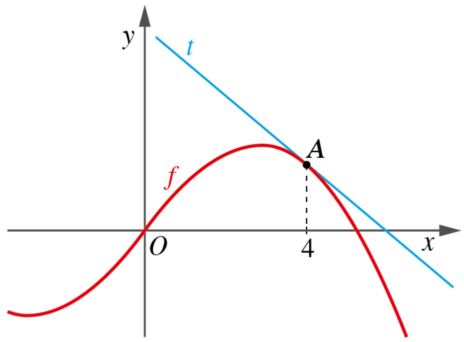
Os valores de *a* e de *b*, arredondados às centésimas são, respetivamente:

(A) $a=1,65 \quad \wedge \quad b=2,03$ **(B)** $a=1,65 \quad \wedge \quad b=2,72$

(C) $a=2,03 \quad \wedge \quad b=2,72$ **(D)** $a=2,72 \quad \wedge \quad b=7,39$

3. Na figura está representada parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x\cos(0,3x)$$



A reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* de abcissa 4. A inclinação da reta *t* é, em graus e arredondada às décimas:

(A) 142,9 **(B)** 37,1 **(C)** −37,1 **(D)** 152,9

4. Em casa da Rita há um sistema de aquecimento através de circulação de água quente. Está associado ao sistema um monitor que permite visualizar a **temperatura da água à saída do sistema** e a **temperatura ambiente no interior da casa**.

Durante 45 minutos, após o sistema ter sido ligado, foram feitos vários registos que permitiram definir duas funções *f* e *g*:

- $f(t) = \dfrac{k}{1+2,6e^{-0,1t}}$, $t \in [0, 45]$ e $k \in \mathbb{R}^+$
- $g(t) = 28\sin(0,04t)$, $t \in [0, 45]$

A **temperatura da água, em graus Celsius, à saída do sistema,** *t* minutos após o sistema ter sido ligado é dada por $f(t)$ e, nesse instante, $g(t)$ representa a **diferença**, em graus Celsius, **entre a temperatura da água à saída do sistema e a temperatura ambiente no interior da casa**.

4.1. Calcula o valor de k, sabendo que a temperatura ambiente no interior da casa, no instante em que o sistema foi ligado, era de 15,6 ºC.

4.2. Nas questões seguintes, considera $k = 56$ e recorre às capacidades gráficas da calculadora.

a) Determina a temperatura ambiente no interior da casa, no instante em que a função *g* atinge o valor máximo. Apresenta o resultado arredondado às décimas, mantendo nos cálculos intermédios pelo menos três casas decimais.

b) Resolve o seguinte problema.

"No período de tempo considerado, há um instante em que a temperatura da água à saída é o dobro da temperatura ambiente no interior da casa. Determina esse instante."

Na tua resolução deves apresentar:
- uma equação que traduza o problema;
- a resolução gráfica da equação;
- a solução, em minutos e segundos, sendo os segundos arredondados às unidades.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões – Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2. a)**	**4.2. b)**	
Pontos	14	12	12	12	15	20	**85**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

5. O esquema seguinte representa duas linhas consecutivas do Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} & 1 & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \overset{a}{\bullet} & & \overset{a}{\bullet} & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & 1 & \\ 1 & & \bullet & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \overset{2a}{\bullet} & & \bullet & & \cdots & & \bullet & & \bullet & & 1 \end{array}$$

A segunda linha do esquema pode ser representada por: ${}^nC_0 \quad {}^nC_1 \quad {}^nC_2 \quad \cdots \quad {}^nC_{n-1} \quad {}^nC_n$.

O valor de n pode ser:

(A) 2015 **(B)** 2019 **(C)** 2022 **(D)** 2025

6. Sejam a e b números reais maiores que 1.

Se $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=5$, então valor numérico de $\log_b\left(a^2b\right)$ é:

(A) $\frac{13}{12}$ **(B)** $\frac{7}{3}$ **(C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ **(D)** $\frac{11}{9}$

7. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\ln^2(x)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

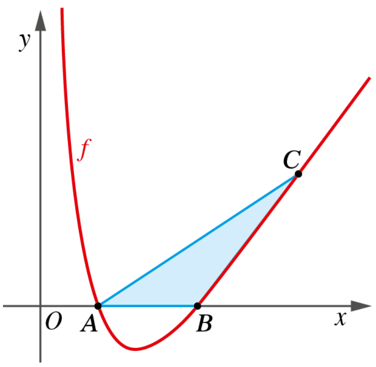
Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representados o gráfico de f e o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

– as abcissas de A e de B são zeros de f;

– C é um ponto de inflexão do gráfico de f;

– a função derivada de f é definida por:

$$f'(x)=\frac{2}{x}\ln(x)+\frac{1}{x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$



7.1. Mostra que existe um ponto P do gráfico de f, de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[$, em que a reta tangente ao gráfico no ponto P é paralela à reta definida pela equação $y=-2x+3$.

7.2. Determina as coordenadas dos pontos A, B e C e mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{3(\mathrm{e}-1)}{8\mathrm{e}}$.

8. Considera a função f, de domínio $]-\infty, \pi[$, definida por:

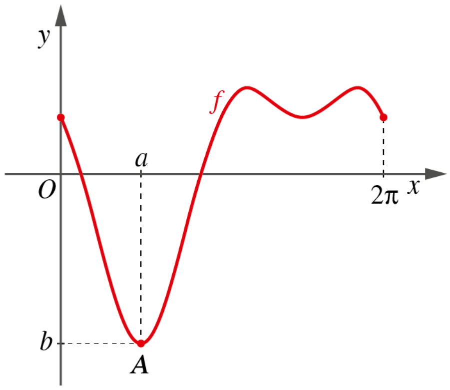
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos^2(x)}{-2x\sin(x)} & \text{se } x\in\,]0, \pi[\\ -\dfrac{1}{2} & \text{se } x\in [-1, 0] \\ \dfrac{e^{x+1}-1}{x^2-1} & \text{se } x\in\,]-\infty, -1[\end{cases}$$

8.1. Mostra que o gráfico de f admite uma assíntota horizontal. Indica uma equação dessa assíntota.

8.2. Estuda a função f quanto à continuidade em $x=0$ e em $x=-1$.

9. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, está representada a função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por:

$$f(x)=\cos(2x)-2\sin x$$



9.1. O ponto $A(a,b)$ pertence ao gráfico de f, sendo a o menor zero da função derivada de f.

Determina as coordenadas do ponto A.

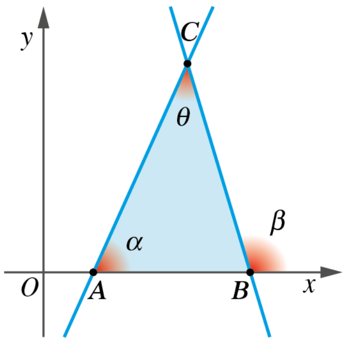
9.2. Mostra que $\forall x\in[0, 2\pi],\ f(x)=-2\sin^2(x)-2\sin(x)+1$ e resolve a equação $f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

10. Na figura está representado o triângulo [*ABC*].

Sabe-se que:

- α e β representam as inclinações das retas *AC* e *BC*, respetivamente;
- a reta *AC* é definida pela equação $y=mx+b$;
- a reta *BC* é definida pela equação $y=m'x+b'$.

Mostra que $\tan(\theta)=\dfrac{m'-m}{1+m'm}$.



FIM (Caderno 2)

Cotações										Total
Questões – Caderno 2	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	
Pontos	12	12	15	15	10	14	12	15	10	**115**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1

1. Acontecimentos dados:

***R*:** "A soma dos números das bolas retiradas é um número ímpar."

***S*:** "As duas bolas têm número par."

Seja n o número de bolas transferidas da caixa B para a caixa A.

O número de bolas da caixa A passa a ser $10+n$, sendo $5+n$ o número de bolas pares.

$$P(R)=\frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2} \quad \text{e} \quad P(S)=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2}$$

$$P(R)=P(S) \Leftrightarrow \frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2}=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2} \Leftrightarrow {}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1={}^{n+5}C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)!}{(n+3)!2!} \Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)(n+4)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10(n+5)-(n+5)(n+4)=0 \Leftrightarrow (n+5)(10-n-4)=0 \Leftrightarrow n=-5 \ \vee \ n=6$$

Como $n\in\mathbb{N}$, tem-se $n=6$.

Resposta: Transferiram-se seis bolas da caixa B para a caixa A.

2. Sendo $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$, então $\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$, ou seja, $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$.

Sendo g uma função crescente, tem-se $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\le \mathrm{e}^{f(x)}\le \mathrm{e}$. Então, $D'_h=\left[\sqrt{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}\right]$.

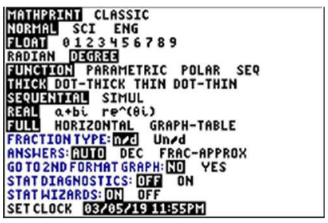
Assim $a=\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1,65$ e $b=\mathrm{e}\approx 2,72$.

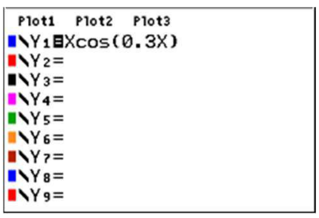
Resposta: Opção **(B)** $\quad a=1,65 \wedge b=2,72$

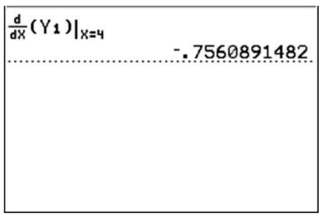
3. Verificar que a configuração da calculadora está em radianos.

Inserir a expressão da função e, em seguida, calcular a derivada da função para $x=4$.

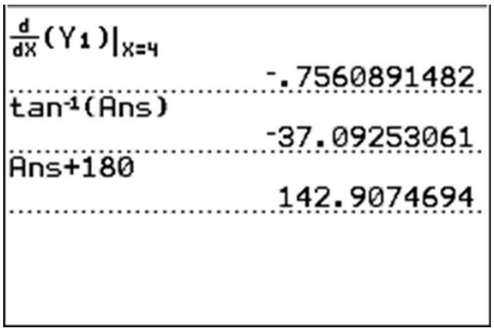
Configurar a calculadora em graus para obter a inclinação.







Atendendo a que o valor de $f'(4)<0$, é necessário considerar a solução que corresponde a uma amplitude entre 90º e 180º (ângulo do 2.º quadrante).



Assim, obtém-se, 142,9º, aproximadamente.

Resposta: Opção **(A)**

4.1. Sabe-se que:

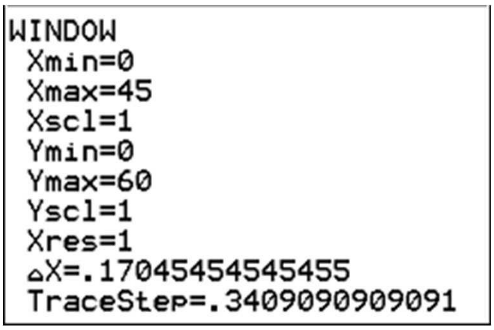
- $f(t)=\dfrac{k}{1+2,6\,\mathrm{e}^{-0,10t}}$, $t\in[0,45]$ e $k\in\mathbb{R}^+$
- $g(t)=28\sin(0,04t)$, $t\in[0,45]$

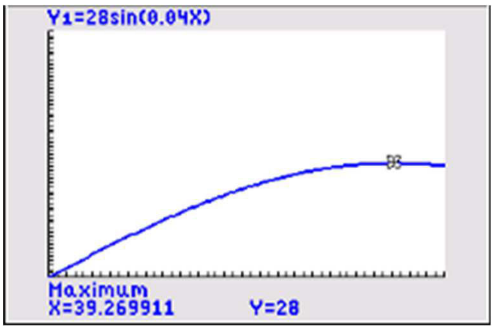
Para $t=0$, tem-se $f(0)=\dfrac{k}{3,6}$ e $g(0)=0$.

$$g(0)=f(0)-15,6 \Leftrightarrow 0=\frac{k}{3,6}-15,6 \Leftrightarrow k=56,16$$

Resposta: $k=56,16$

4.2. **a)**





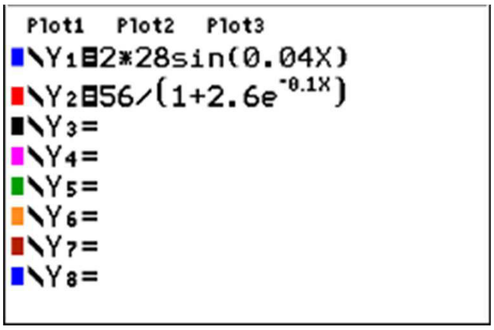
Para $t=39,2699$, obtém-se $f(39,2699)\approx 53,2711$.

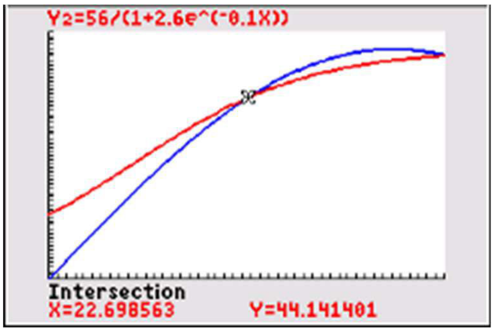
Designando por T a temperatura ambiente, tem-se $28=53,2711-T$, ou seja, $T\approx 25,3$.

Resposta: A temperatura ambiente é de 25,3 ºC.

4.2. **b)** $f(t)=2\left(f(t)-g(t)\right) \Leftrightarrow f(t)=2f(t)-2g(t) \Leftrightarrow f(t)=2g(t)$

Resolvendo graficamente, obtém-se:





$t \approx 22{,}699$ min, ou seja, 22 min e 42 s

Resposta: Ao fim de 22 min e 42 s.

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

5. Há apenas um elemento central, o $2a$. Então, o número de elementos dessa linha é ímpar.

Daqui resulta que o valor de n é um número par.

Resposta: **(C)** 2022

6. $\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a(ab)=5 \Leftrightarrow \log_a(ab)=10 \Leftrightarrow \log_a a+\log_a b=10 \Leftrightarrow \log_a b=9$

Assim, tem-se $\log_a b=9$. **(1)**

$$\log_b\left(a^2b\right)=\log_b\left(a^2\right)+1=2\log_b(a)+1=2\times\frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}+1=\frac{2}{\log_a(b)}+1$$

Recorrendo ao valor obtido em **(1)**, tem-se:

$$\log_b\left(a^2b\right)=\frac{2}{\log_a(b)}+1=\frac{2}{9}+1=\frac{11}{9}$$

Resposta: Opção **(D)** $\frac{11}{9}$

7.1. Pretende-se provar que a equação $f'(x)=-2$ é possível no intervalo $\left]\frac{1}{e},1\right[$.

A função f' é contínua no domínio, ou seja, em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, em $\left[\frac{1}{e},1\right]$, por ser a soma e produto de funções contínuas em $\mathbb{R}^+$.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{\frac{1}{e}}\ln\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{\frac{1}{e}}=2e\times(-1)+e=-e$$

$$f'(1)=\frac{2}{1}\ln(1)+\frac{1}{1}=2\times0+1=1$$

Recorrendo ao Teorema de Bolzano, atendendo a que f' é contínua em $\left[\frac{1}{e},1\right]$ e $f'\left(\frac{1}{e}\right)<-2<f'(1)$, conclui-se que $\exists c\in\left]\frac{1}{e},1\right[: f'(c)=-2$, tal como se pretendia provar.

Assim, o ponto P tem de coordenadas $(c, f(c))$, $c\in\left]\frac{1}{e},1\right[$ em que $f'(c)=-2$, ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é –2.

7.2. As abcissas de A e de B são zeros da função f.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2(x)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln^2(x)+\ln(x)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x)\left(\ln(x)+1\right)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \left(\ln(x)=0 \vee \ln(x)=-1\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\mathrm{e}^{-1}$$

$A\left(\mathrm{e}^{-1},0\right)$ e $B(1,0)$

C é ponto de inflexão do gráfico de f.

$$f''(x)=\left(\frac{2}{x}\ln(x)+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2}\ln(x)+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(-2\ln(x)+1\right)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
f		$\cup$	$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$	$\cap$

$$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\ln^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

O ponto C tem de coordenadas $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},\frac{3}{4}\right)$.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\dfrac{\overline{AB}\times\frac{3}{4}}{2}$.

$$\frac{\overline{AB}\times\frac{3}{4}}{2}=\frac{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{8}\times 3=\frac{3(\mathrm{e}-1)}{8\mathrm{e}}$$, como se pretendia provar.

8.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}-1}{x^2-1}=\dfrac{0-1}{+\infty}=0$

A reta de equação $y=0$

Resposta: A assíntota horizontal tem de equação $y=0$.

8.2.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\cos^2 x}{-2x\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-2x\sin x} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2}$

  A função *f* é contínua em $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \frac{e^{x+1}-1}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \frac{e^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)}$

  Fazendo $x+1=y$: se $x\to -1$, então $y\to 0$.

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y(y-2)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} \times \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{y-2} = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{2}$

  A função *f* é contínua em $x=-1$.

Resposta: A função é contínua em $x=0$ e em $x=-1$.

9.1. $f'(x) = (\cos(2x) - 2\sin x)' = -2\sin(2x) - 2\cos x = -2(2\sin x\cos x) - 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(2\sin x\cos x) - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \vee x = \frac{-\pi + 12k\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi + 12k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0, 2\pi]$, tem-se: $x=\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{11\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6}$

O menor dos zeros da derivada é $\frac{\pi}{2}$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) - 2\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 2 = -3$

As coordenadas do ponto *A* são $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$.

Resposta: $A\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$

9.2. $\forall x \in [0, 2\pi],\ f(x) = -2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1$

$f(x) = \cos(2x) - 2\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 2\sin x$

$f(x) = -2\sin^2 x - 2\sin x + 1$, como se pretendia demonstrar.

$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

Resposta: Conjunto-solução: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

10. Sabe-se que:

- $\beta = \alpha + \theta$. Então, $\theta = \beta - \alpha$.
- $\tan(\alpha) = m$
- $\tan(\beta) = m'$

$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha} =$

$= \frac{\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha} - \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}}{1 + \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha}} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{m' - m}{1 + m'm}$

FIM (Caderno 2)