

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | Data:

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

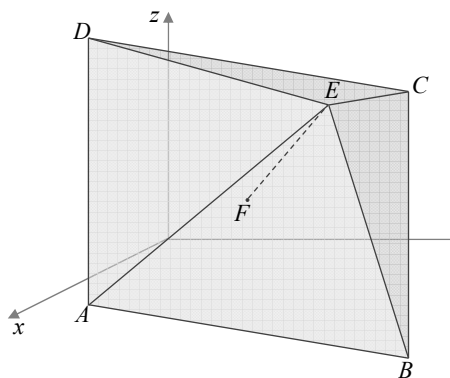
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

O ponto F é o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto E tem coordenadas $(2, 4, 3)$;
- para determinado $a \in \mathbb{R}$, o plano ABC pode ser definido pela equação $x + 2y + 2z + a = 0$;
- a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano ABC intersesta este plano num ponto de abcissa 1;
- o vetor \overrightarrow{EC} tem coordenadas $(-5, -1, -1)$.



- 1.1. Mostre que o ponto F tem coordenadas $(1, 2, 1)$.
- 1.2. Qual é o valor de a ?
- (A) -7 (B) -16 (C) -9 (D) 9
- 1.3. Determine o volume da pirâmide.
- 1.4. Qual das seguintes condições define uma superfície esférica tangente ao plano ABC no ponto F ?
- (A) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$
- (C) $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 27$ (D) $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$
- 1.5. Determine um valor aproximado à décima do grau da amplitude do ângulo DEB .

2. Considere a sucessão (a_n) definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -50 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que, para determinado $p \in \mathbb{N}$, a soma dos primeiros p termos desta sucessão é igual a p .

Determine o valor de p .

3. Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Qual das afirmações seguintes **não** é necessariamente verdadeira?

- (A) (u_n) é decrescente (B) (u_n) é limitada
(C) (u_n) é convergente (D) (u_n) tende para zero

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	2	3.	
15	10	20	10	15	20	10	100

Caderno 2

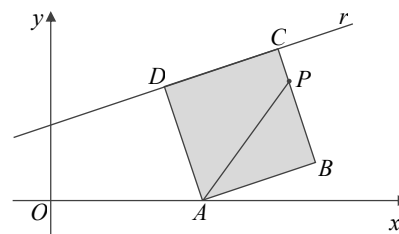
(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

4. Na figura está representado, num plano munido de um referencial ortonormado, o quadrado $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 4;
- os pontos B , C e D têm coordenadas positivas;
- a reta r é definida pela equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ e passa nos pontos D e C ;
- o ponto P pertence ao segmento de reta $[BC]$.



- 4.1. Defina a reta AD pela equação reduzida.
- 4.2. Mostre que $\overrightarrow{AD} = (-1, 3)$ e determine as coordenadas do ponto C .
- 4.3. O valor do produto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ é:

- (A) $\sqrt{10}$ (B) 10 (C) $2\sqrt{10}$ (D) 20

5. De uma progressão geométrica (u_n) , de termos positivos, sabe-se que:

$$u_3 = \frac{3}{8} \wedge u_n = 16u_{n+2}, \text{ qualquer que seja } n \in \mathbb{N}$$

- 5.1. Mostre que $u_n = 3 \times 2^{3-2n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
- 5.2. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de (u_n) .

O valor de $\lim S_n$ é:

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) 6 (C) 8 (D) 3

6. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{k(x-1)}{\sqrt{x}-x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (k \text{ designa um número real})$$

6.1. Determine k , sabendo que f é contínua em $x=1$.

6.2. Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Fim da prova

Formulário

Geometria

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4.1.	4.2.	4.3.	5.1	5.2.	6.1.	6.2.	
15	15	10	15	10	20	15	100
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							200

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $E(2, 4, 3)$; $ABC: x + 2y + 2z + a = 0$; $\overline{EC}(-5, -1, -1)$

1.1. Seja r a reta que passa no ponto $E(2, 4, 3)$ e é

perpendicular ao plano ABC

O vetor de coordenadas $(1, 2, 2)$ é perpendicular ao plano

ABC . Logo é um vetor diretor da reta r .

Equação vetorial da reta r :

$$(x, y, z) = (2, 4, 3) + k(1, 2, 2), k \in \mathbb{R}$$

A reta r intersesta o plano ABC num ponto de abcissa

$$x = 1.$$

$$(1, y, z) = (2, 4, 3) + k(1, 2, 2), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 + k \\ y = 4 + 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 4 + 2 \times (-1) \\ z = 3 + 2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Portanto, a reta r intersesta o plano ABC no ponto de coordenadas $(1, 2, 1)$.

Dado que a pirâmide $[ABCDE]$ é regular, a interseção da reta r com o plano da base é o ponto F , centro da base da pirâmide. Logo, o ponto F tem coordenadas $(1, 2, 1)$.

1.2. O ponto $F(1, 2, 1)$ pertence ao plano $ABC: x + 2y + 2z + a = 0$.

Substituindo as coordenadas na equação do plano, vem

$$1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + a = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 + 2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -7$$

Resposta: **(A)**

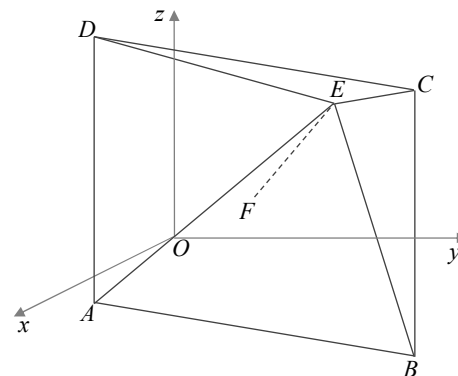
1.3. $E(2, 4, 3)$ e $\overline{EC}(-5, -1, -1)$

$$C = E + \overline{EC} = (2, 4, 3) + (-5, -1, -1) = (-3, 3, 2)$$

$$\overline{FC} = C - F = (-3, 3, 2) - (1, 2, 1) = (-4, 1, 1)$$

$$\|\overline{FC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\overline{AC}\| = 2 \times \|\overline{FC}\| = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$



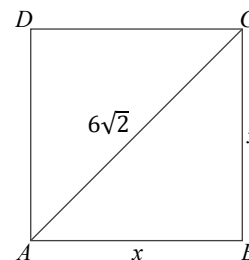
A base $[ABCD]$ da pirâmide é um quadrado cuja

diagonal mede $\|\overline{AC}\| = 2 \times \|\overline{FC}\| = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Seja $\overline{AB} = x$.

$$x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 36 \times 2 \Leftrightarrow x^2 = 36$$

A área da base da pirâmide é igual a 36.



Altura da pirâmide:

$$E(2, 4, 3), F(1, 2, 1)$$

$$\overline{EF} = F - E = (1, 2, 1) - (2, 4, 3) = (-1, -2, -2)$$

$$h = \|\overline{EF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$$

- 1.4. Dado que o ponto F pertence ao plano ABC e \overline{EF} é perpendicular a esse plano, a superfície esférica de centro em $E(2, 4, 3)$ e raio $r = \|\overline{EF}\| = 3$ é tangente a esse plano no ponto F .

Equação da superfície esférica: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 9$

Resposta: **(D)**

- 1.5. $D\hat{E}B = A\hat{E}C = 2F\hat{E}C$; $\overline{EF} = (-1, -2, -2)$; $\overline{EC} = (-5, -1, -1)$

$$\|\overline{EF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overline{EC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{EF} \cdot \overline{EC} = (-1, -2, -2) \cdot (-5, -1, -1) = 5 + 2 + 2 = 9$$

$$\cos(F\hat{E}C) = \cos(\overline{EF}, \overline{EC}) = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{EC}}{\|\overline{EF}\| \times \|\overline{EC}\|} = \frac{9}{3 \times 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se $\cos(F\hat{E}C) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ então $F\hat{E}C \approx 54,736^\circ$

$$D\hat{E}B = 2 \times F\hat{E}C \approx 2 \times 54,736^\circ \approx 109,5^\circ$$

$$2. \quad \begin{cases} a_1 = -50 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 2$ sendo $a_1 = -50$.

Termo geral de (a_n) :

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

$$a_n = -50 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow a_n = -50 + 2n - 2 \Leftrightarrow a_n = 2n - 52$$

Soma dos n primeiros termos de (a_n) : $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$

$$S_p = p \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_p}{2} \times p = p \Leftrightarrow \frac{-50 + 2p - 52}{2} \times p = p \Leftrightarrow \quad | \quad a_1 = -50 \text{ e } a_n = 2n - 52$$

$$\Leftrightarrow \frac{2p - 102}{2} \times p - p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p - 51) \times p - p = 0 \Leftrightarrow p(p - 51 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 0 \vee p - 52 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 52$$

3. É dado que:

- $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Logo, (u_n) é decrescente.

Se $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, (u_n) é minorada.

Se (u_n) é decrescente e minorada então é convergente e, portanto, é limitada.

A afirmação (D) não é necessariamente verdadeira.

Por exemplo, se $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, então (u_n) é uma sucessão decrescente de termos

positivos e $\lim u_n = 1$.

Resposta: **(D)**

Caderno 2

4. $A(4,0); \quad r: y = \frac{1}{3}x + 2$

4.1. A reta AD é perpendicular à reta r porque $[ABCD]$ é um quadrado. Logo, $m_{AD} \times m_{DC} = -1$.

$$m_{AD} \times \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow m_{AD} = -3$$

A reta AD tem declive -3 e passa no ponto $A(4,0)$

$$AD: y = -3x + b$$

$$0 = -3 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 12$$

$$AD: y = -3x + 12$$

4.2. O ponto D é a interseção das retas r e AD :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 12 = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 30 = x \\ y = -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 30 \\ y = -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \times 3 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$D(3,3)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3,3) - (4,0) = (-1,3)$$

$$\overrightarrow{DC} \text{ é perpendicular a } \overrightarrow{AD} \text{ e } \|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$$

$$\text{Então, se } \overrightarrow{AD} = (-1,3) \text{ vem } \overrightarrow{DC} = (3,1) \text{ ou } \overrightarrow{DC} = (-3,-1)$$

$$C = D + \overrightarrow{DC}$$

$$\text{Se } \overrightarrow{DC} = (3,1), C = D + \overrightarrow{DC} = (3,3) + (3,1) = (6,4)$$

$$\text{Se } \overrightarrow{DC} = (-3,-1), C = D + \overrightarrow{DC} = (3,3) + (-3,-1) = (0,2)$$

Como C tem coordenadas positivas, temos $C(6,4)$.

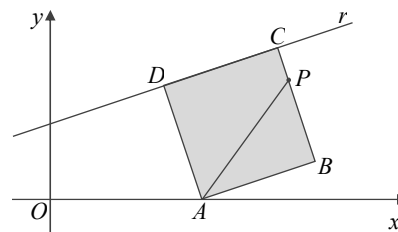
4.3. Dado que o ponto B é a projeção ortogonal do ponto P na reta AB , vem, pela definição de produto escalar,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2 \quad | \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Como } \overrightarrow{AD} = (-1,3), \text{ vem } \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AD}\|^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

Resposta: **(B)**



5. $u_3 = \frac{3}{8} \wedge u_n = 16u_{n+2}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

5.1. Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão r então $u_n = u_k \times r^{n-k}$.

Substituindo n por $n+2$ e k por n , vem:

$$u_{n+2} = u_n \times r^{n+2-n}$$

$$u_{n+2} = 16u_{n+2} \times r^2 \quad | \quad u_n = 16u_{n+2}$$

$$\frac{u_{n+2}}{16u_{n+2}} = r^2 \quad | \quad \text{É dado que } u_{n+2} \neq 0, \text{ qualquer que seja } n \in \mathbb{N}$$

$$r^2 = \frac{1}{16}$$

Como (u_n) é uma sucessão de termos positivos, vem $r = \frac{1}{4}$.

$$u_n = u_k \times r^{n-k}$$

$$u_n = u_3 \times r^{n-3} \quad | \quad u_3 = \frac{3}{8} \wedge r = \frac{1}{4}$$

$$u_n = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} = 3 \times \frac{1}{8} \times 4^{3-n} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (2^2)^{3-n} =$$

$$= 3 \times 2^{-3} \times 2^{6-2n} = 3 \times 2^{-3+6-2n} = 3 \times 2^{3-2n}$$

$$u_n = 3 \times 2^{3-2n}, \text{ qualquer que seja } n \in \mathbb{N}.$$

5.2. $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

$$u_1 = 3 \times 2^{3-2 \times 1} = 3 \times 2^1 = 6 \text{ e } r = \frac{1}{4}$$

$$\lim S_n = \lim \left[6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right] = 6 \times \frac{1 - \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \quad | \quad \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$= 6 \times \frac{4}{3} \times (1-0) = 2 \times 4 = 8$$

Resposta: (C)

6.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{k(x-1)}{\sqrt{x-x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

6.1. f é contínua em $x=1$ se existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1-2}{\sqrt{1^2+3}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x-1)}{\sqrt{x-x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} k \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+x})}{(\sqrt{x-x})(\sqrt{x+x})} = \\ &= k \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+x})}{(\sqrt{x})^2 - x^2} = k \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+x})}{x-x^2} = \\ &= k \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+x})}{-x(x-1)} = -k \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+x}}{x} = -k \times \frac{\sqrt{1+1}}{1} = -2k \end{aligned}$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ é necessário e suficiente que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -2k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

Portanto, se a função f é contínua em $x=1$ então $k = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} 6.2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{0-2}{-\sqrt{1+0}} = 2 \end{aligned}$$