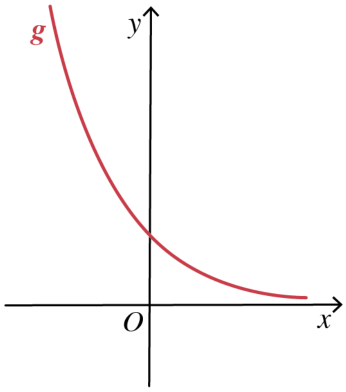
Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano
Proposta de teste de avaliação [março – 2023]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.



Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) tais que:

$$u_n = n - n^2 \;\; ; \;\; v_n = \sqrt{n} \;\; \text{e} \;\; w_n = \frac{1}{n^2+1}$$

Determina $\lim\left[g(u_n)\right]$, $\lim\left[g(v_n)\right]$ e $\lim\left[g(w_n)\right]$.

2. Considera a equação:

$$x\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2}\right)\left(x^2 - 4\right)\log_3(2x-1) = 0$$

Do conjunto-solução da equação, escolhe-se, ao acaso, uma solução.

Qual é a probabilidade de escolher uma solução que seja um número inteiro?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

3. Para um certo número k, diferente de zero, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{kx} - 1} = 3$.

Qual é o valor de k?

(A) 3 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

4. Considera, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{x} & \text{se } x>0 \\ k & \text{se } -1\leq x\leq 0 \\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x<-1 \end{cases}$$

4.1. Verifica se o gráfico de f tem assíntotas horizontais. Em caso afirmativo, apresenta uma equação para cada uma dessas assíntotas.

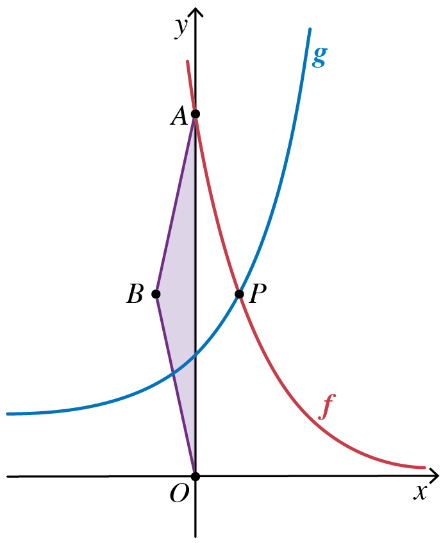
4.2. Mostra que:

a) qualquer que seja o valor de k, a função f **não** é contínua em $x=0$ nem em $x=-1$.

b) se $x<-1$, então $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

5. Na figura ao lado, estão representações gráficas das funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, e um triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- $f(x)=6e^{-x}$;
- $g(x)=e^{x}+1$;
- o ponto P é o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g;
- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy;
- os pontos B e P são simétricos um do outro em relação ao eixo Oy.



Mostra que a medida da área do triângulo $[OAB]$ é igual a $\ln 8$.

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

A função f', função derivada de f, é definida por $f'(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$.

6.1. O gráfico de f tem um ponto de inflexão. Determina a abcissa desse ponto.

6.2. Considera a reta r que passa no ponto $A(1,1)$ e num ponto B do gráfico da função f'.

Sabe-se que o declive da reta r é igual a $-\sqrt{2}$.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abcissa do ponto B.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

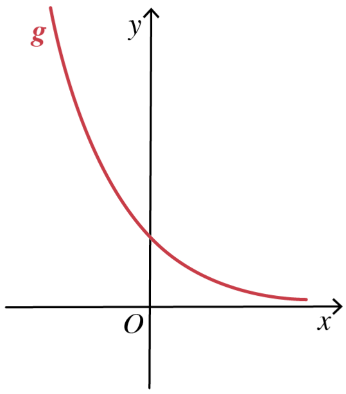
Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita obter o valor pedido;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora;
- assinala o ponto cuja abcissa é pedida com valor arredondado às décimas.

FIM

Cotações										Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2. a)	4.2. b)	5.	6.1.	6.2.	
Cotações	21	16	16	25	25	25	25	25	22	**200**

1. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$.



Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) tais que:

$$u_n = n-n^2 \;;\; v_n=\sqrt{n} \text{ e } w_n=\frac{1}{n^2+1}$$

Determina $\lim\left[g(u_n)\right]$, $\lim\left[g(v_n)\right]$ e $\lim\left[g(w_n)\right]$.

1. $\lim(u_n)=\lim\left(n-n^2\right)=-\infty \;;\; \lim g(u_n)=+\infty$

$\lim(v_n)=\lim\sqrt{n}=+\infty \;;\; \lim g(v_n)=0$

$\lim(w_n)=\lim\frac{1}{n^2+1}=0 \;;\; \lim g(w_n)=1$

2. Considera a equação:

$$x\left(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^2\right)\left(x^2-4\right)\log_3(2x-1)=0$$

Do conjunto-solução da equação, escolhe-se, ao acaso, uma solução.

Qual é a probabilidade de escolher uma solução que seja um número inteiro?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{4}{5}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

2. $x\left(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^2\right)\left(x^2-4\right)\log_3(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee \mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^2 \vee x^2-4=0 \vee 2x-1=1\right) \wedge 2x-1>0$

$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\frac{2}{3} \vee x=2 \vee x=-2 \vee x=1\right) \wedge x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=2 \vee x=1$

Conjunto-solução: $S=\left\{\frac{2}{3}, 2, 1\right\}$

A probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

Opção correta: (A) $\frac{2}{3}$

3. Para um certo número k, diferente de zero, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{e^{kx}-1}=3$.

Qual é o valor de k?

(A) 3 **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{e^{kx}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{kx}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{x}\times\dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times 2}{\dfrac{e^{kx}-1}{kx}\times k}\right]=$

$$=\frac{2}{k}\lim_{x\to 0}e^{x}\times\frac{\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{kx}}=\frac{2}{k}\times 1\times\frac{1}{1}=\frac{2}{k}$$

Então, $\dfrac{2}{k}=3$, ou seja, $k=\dfrac{2}{3}$.

Opção correta: (D) $\dfrac{2}{3}$

4. Considera, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & \text{se } x>0\\ k & \text{se } -1\le x\le 0\\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x<-1\end{cases}$$

4.1. Verifica se o gráfico de f tem assíntotas horizontais. Em caso afirmativo, apresenta uma equação para cada uma dessas assíntotas.

4.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0^{+}$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\ln\left(1+0^{-}\right)=0^{-}$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

Resposta: O gráfico de f tem uma única assíntota horizontal, a reta de equação $y=0$.

4.2. Mostra que:

a) qualquer que seja o valor de *k*, a função *f* **não** é contínua em $x=0$ nem em $x=-1$.

b) se $x<-1$, então $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

4.2.

a) $f(0)=k$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq f(0)$, conclui-se que a função *f* é **descontínua** em $x=0$.

$f(-1)=k$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq f(-1)$, conclui-se que a função *f* é **descontínua** em $x=-1$.

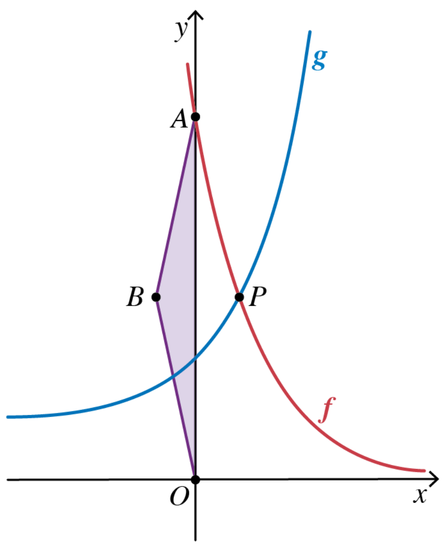
b) Se $x<-1$, então $f'(x)=\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]'$.

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{x}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x^2+x}$$

Fica provado que, se $x<-1$, então $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

5. Na figura ao lado, estão representações gráficas das funções *f* e *g*, de domínio $\mathbb{R}$, e um triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- $f(x)=6e^{-x}$;
- $g(x)=e^{x}+1$;
- o ponto *P* é o ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*;
- o ponto *A* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Oy*;
- os pontos *B* e *P* são simétricos um do outro em relação ao eixo *Oy*.



Mostra que a medida da área do triângulo $[OAB]$ é igual a $\ln 8$.

5. As coordenadas do ponto A são $\left(0, f\left(0\right)\right)$.

$f\left(0\right) = 6 \times \mathrm{e}^{0} = 6$.

$A\left(0, 6\right)$

A abcissa do ponto P é solução da equação $f\left(x\right) = g\left(x\right)$.

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{6}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{x} + 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$$

$$\mathrm{e}^{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} = 2 \vee \mathrm{e}^{x} = -3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

As coordenadas do ponto P são $\left(\ln 2, \ g\left(\ln 2\right)\right)$.

$g\left(\ln 2\right) = e^{\ln 2} + 1 = 2 + 1 = 3$

$P\left(\ln 2, 3\right)$

Medida da área do triângulo $[OAB]$: $\dfrac{\overline{OA} \times \dfrac{\overline{BP}}{2}}{2} = \dfrac{6 \times \ln 2}{2} = 3\ln 2 = \ln\left(2^{3}\right) = \ln 8$

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^{+}$.

A função f', função derivada de f, é definida por $f'\left(x\right) = \dfrac{2\ln\left(x\right)}{x}$.

6.1. O gráfico de f tem um ponto de inflexão. Determina a abcissa desse ponto.

6.1. $f''\left(x\right) = \left(\dfrac{2\ln\left(x\right)}{x}\right)' = 2 \times \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln\left(x\right)}{x^{2}} = 2 \times \dfrac{1 - \ln\left(x\right)}{x^{2}}$

$f''\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$

x	0		e	$+\infty$
$f''\left(x\right)$		$+$	0	$-$
f		$\cup$		$\cap$

A abcissa do ponto de inflexão é e.

6.2. Considera a reta r que passa no ponto $A(1,1)$ e num ponto B do gráfico da função f'.

Sabe-se que o declive da reta r é igual a $-\sqrt{2}$.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abcissa do ponto B.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita obter o valor pedido;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora;
- assinala o ponto cuja abcissa é pedida com valor arredondado às décimas.

6.2. O ponto B pertence ao gráfico de f'.

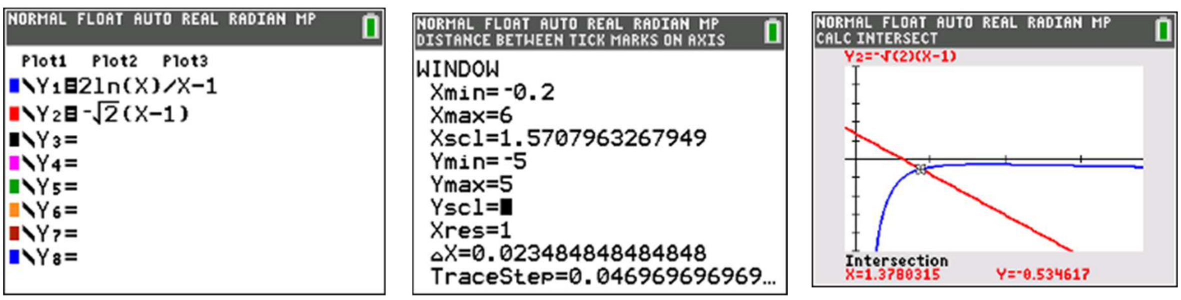
As coordenadas de B são do tipo $\left(x, \frac{2\ln(x)}{x}\right)$.

Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(x-1, \frac{2\ln x}{x} - 1\right)$.

O declive da reta r é dado por $\dfrac{\frac{2\ln x}{x} - 1}{x-1}$. Então:

$$\frac{\frac{2\ln x}{x} - 1}{x-1} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} - 1 = -\sqrt{2}(x-1)$$

Recorrendo à calculadora resolve-se graficamente a equação: $\frac{2\ln x}{x} - 1 = -\sqrt{2}(x-1)$



A abcissa do ponto B, arredondada às décimas, é 1,4.

FIM

Cotações										Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2. a)	4.2. b)	5.	6.1.	6.2.	
Cotações	21	16	16	25	25	25	25	25	22	**200**