

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

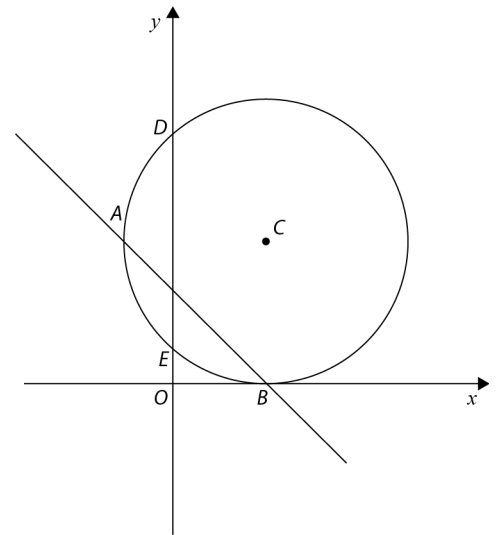
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro no ponto C , tangente ao eixo Ox , os pontos A, B, C, D e E e a reta AB .

Sabe-se, ainda, que:

- a circunferência é definida por $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4$;
- A é o ponto da circunferência de abscissa negativa e ordenada igual à do ponto C ;
- B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox ;
- D e E são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy , sendo D o ponto de maior ordenada.



1.1. Mostre que as coordenadas do ponto C são $(2, 3)$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta AB .

1.3. Determine o valor exato da área do triângulo $[DEC]$.

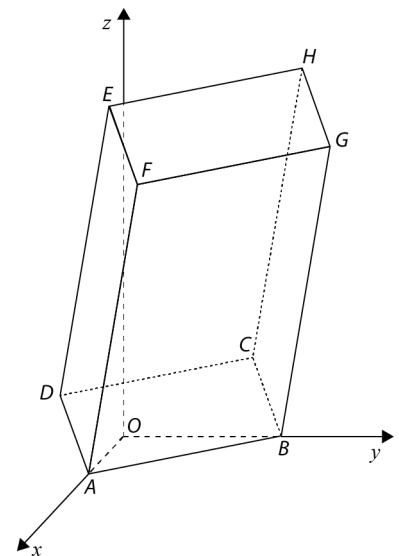
2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma retangular reto $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(4, 0, 0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 6, 0)$;
- o ponto D tem coordenadas $(1, -2, 2)$;
- o ponto H tem coordenadas $(3, 8, 15)$.

2.1. O plano paralelo a xOz que passa no ponto H pode ser definido por:

- (A) $x = 3$
- (B) $y = 8$
- (C) $z = 15$
- (D) $x = 3 \wedge z = 15$



2.2. Determine uma equação vetorial da reta paralela à reta DB que passa em F .

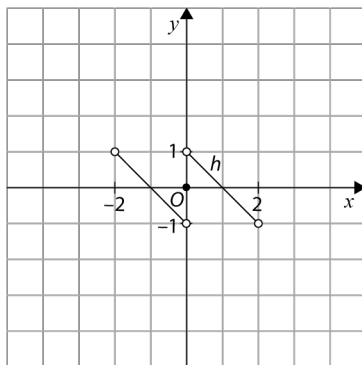
2.3. Determine uma equação do plano medidor de $[AD]$.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

2.4. Considere a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Determine o valor exato do perímetro da interseção da superfície esférica com o plano yOz .

3. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy , o gráfico de uma função h , de domínio $] -2, 2[$.



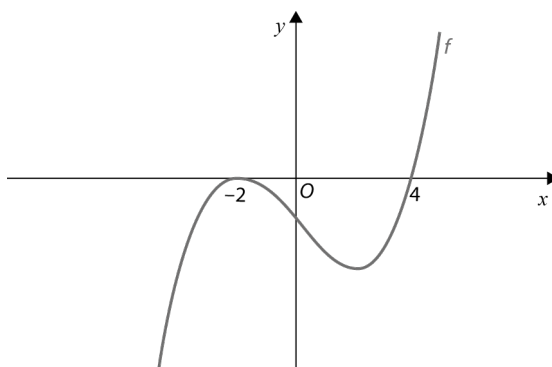
Considere as seguintes proposições:

- I. A função h é decrescente no seu domínio.
- II. A função h não tem extremos.
- III. A função h é par.

Acerca das proposições anteriores, podemos afirmar que:

- (A) são todas verdadeiras.
- (B) são todas falsas.
- (C) apenas a afirmação I é verdadeira.
- (D) apenas a afirmação II é verdadeira.

4. Na figura está representada graficamente parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} .
Sabe-se que a função f tem apenas dois zeros: -2 e 4 .

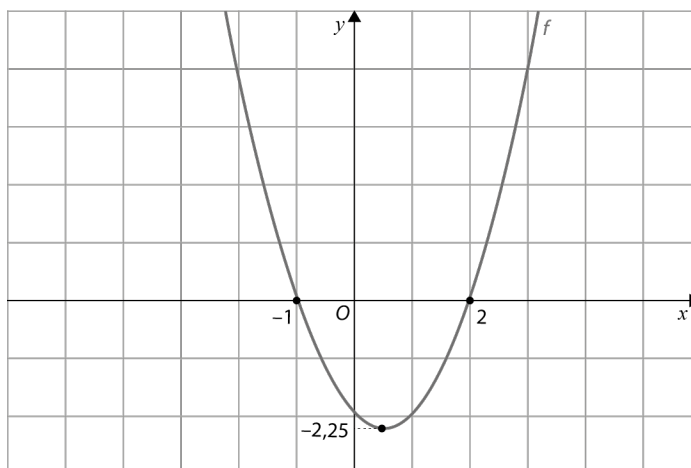


Seja g a função definida por $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(\frac{1}{2}x)}$.

Qual dos seguintes conjuntos é o domínio da função h ?

- (A) $[4, +\infty[$
- (B) $]4, +\infty[$
- (C) $\{-2\} \cup [4, 8[\cup]8, +\infty[$
- (D) $\{-2\} \cup]4, 8[\cup]8, +\infty[$

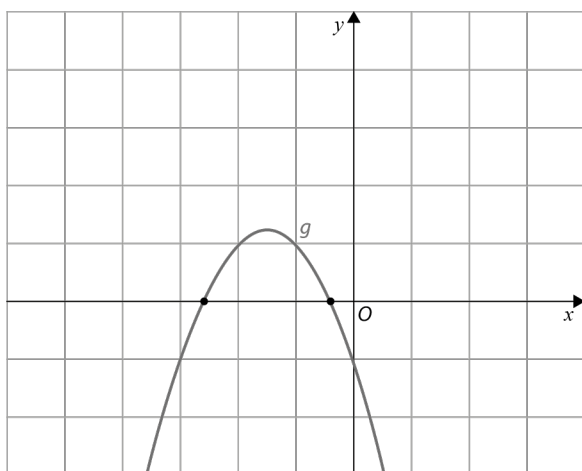
5. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura.



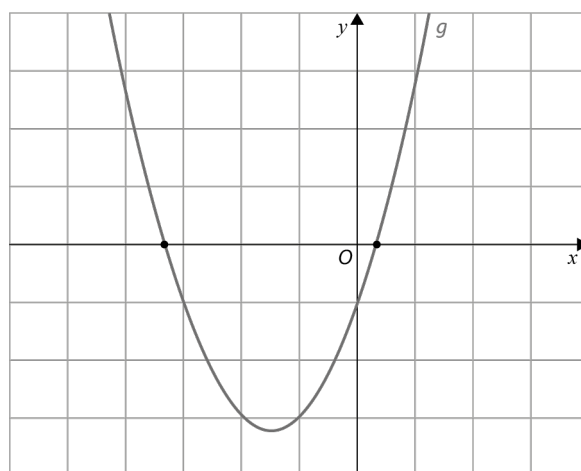
Seja g a função definida por $g(x) = -f(x + 2) - 1$.

Em qual das opções seguintes pode estar a representação gráfica da função g ?

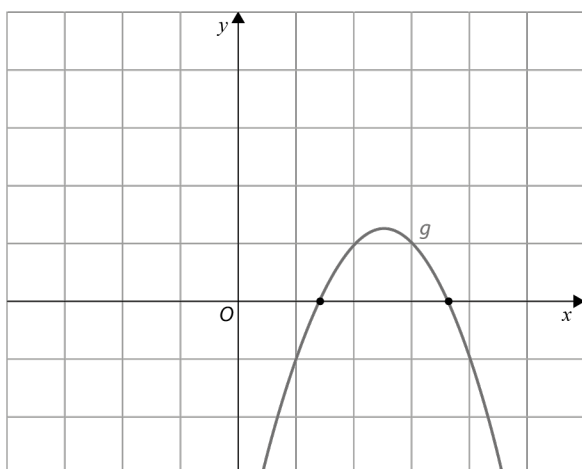
(A)



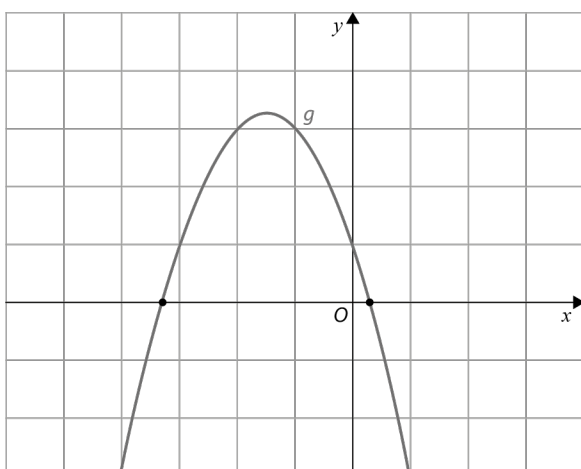
(B)



(C)



(D)



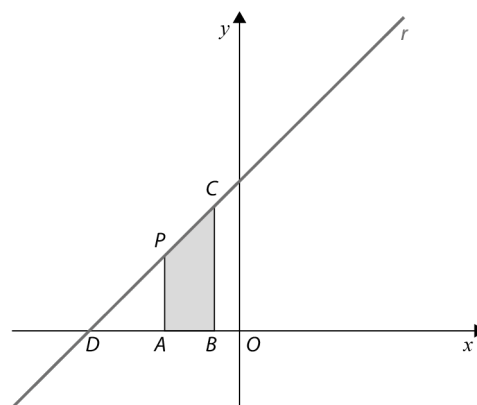
6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a reta r .

O ponto D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e o ponto C é o ponto da reta de abscissa igual a -1 .

O ponto B tem coordenadas $(-1,0)$.

Sabe-se que a reta r é definida pela equação $y = x + 6$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[DC]$, nunca coincidindo com o ponto D nem com o ponto C , e que o ponto A é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox . Seja x a abscissa do ponto P .



Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

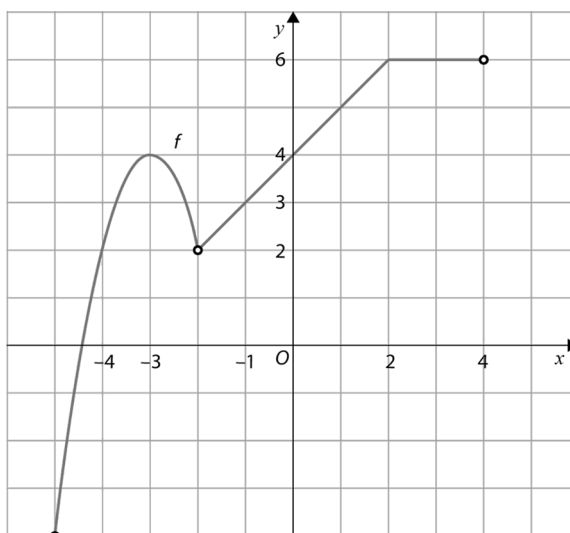
6.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCP]$ é dada, em função de x , por:

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2}, \quad -6 < x < -1$$

6.2. Determine o conjunto de valores de x para os quais a área do trapézio $[ABCP]$ é superior a 8 unidades de área. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

7. Na figura está representada graficamente a função real de variável real f , de domínio

$[-5, -2[\cup]-2, 4[$. Sabe-se que $(-4, 2)$, $(-3, 4)$, $(-1, 3)$ e $(2, 6)$ são pontos do gráfico da função f e parte do gráfico é constituído por uma parábola de vértice de coordenadas $(-3, 4)$.



Qual das expressões seguintes pode definir a função f ?

(A) $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} 2(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6x & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} -2(x+3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < -2 \\ x + 4 & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

8. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{-2x}{1-x}$$

Considere, num referencial ortonormado do plano, os gráficos das funções f e g e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com o semieixo Ox negativo, sendo A o ponto de menor abcissa;
- o ponto C é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g com ordenada positiva.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A , B e C e, nas coordenadas dos pontos em que é necessário fazer arredondamentos, utilizar duas casas decimais;
- desenhar o triângulo $[ABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

| Item | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|----|----|----|------|------|----|----|------------|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.1. | 1.2. | 1.3. | 2.1. | 2.2. | 2.3. | 2.4. | 3. | 4. | 5. | 6.1. | 6.2. | 7. | 8. | Total |
| 16 | 16 | 16 | 10 | 17 | 17 | 17 | 10 | 10 | 10 | 17 | 17 | 10 | 17 | 200 |

Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1.

$$\begin{aligned} 1.1. x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \end{aligned}$$

Logo, $C(2, 3)$.

1.2. $A(\dots, 3)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ (x - 2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$A(-1, 3)$, pois A tem abcissa negativa.

$B(\dots, 0)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x - 2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$B(2, 0)$

$AB: y = mx + b$

$$m = \frac{0 - 3}{2 - 1} = -\frac{3}{1} = -3$$

$y = -x + b$

Como o ponto $B(2, 0)$ pertence à reta, vem que: $0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$

$AB: y = -x + 2$

$$\begin{aligned} 1.3. \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 4}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \pm \sqrt{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$D(0, 3 + \sqrt{5})$, pois D é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox de maior ordenada.

$E(0, 3 - \sqrt{5})$

$$\overline{DE} = (3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$A_{[DEC]} = \frac{\overline{DE} \times \text{abcissa de } C}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 2}{2} = 2\sqrt{5} \text{ u.a.}$$

2.

2.1. Opção (B)

Um plano paralelo ao plano xOz pode ser definido por uma condição do tipo $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Como passa pelo ponto $H(3,8,15)$, então $y = 8$ define o plano paralelo a xOz que passa no ponto H .

$$2.2. \overrightarrow{DB} = (0,6,0) - (1,-2,2) = (-1,8,-2)$$

$$\overrightarrow{BA} = (4,0,0) - (0,6,0) = (4,-6,0)$$

$$\overrightarrow{DA} = (4,0,0) - (1,-2,2) = (3,2,-2)$$

$$\begin{aligned} F = H + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} &= (3,8,15) + (4,-6,0) + (3,2,-2) = \\ &= (7,2,15) + (3,2,-2) = \\ &= (10,4,13) \end{aligned}$$

Uma equação vetorial da reta paralela á reta DB que passa em F é:

$$(x, y, z) = (10,4,13) + k(-1,8,-2), k \in \mathbb{R}$$

$$2.3. (x-4)^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$$

$$\Leftrightarrow -8x + 2x - 4y + 4z + 16 - 1 - 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 4y + 4z + 7 = 0$$

2.4. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$:

$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$M(2, 3, 0)$$

$$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

O raio da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é igual a $\sqrt{13}$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13$ define a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 + (y-3)^2 + z^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (y-3)^2 + z^2 = 9 \end{cases} \text{ Circunferência de centro } (0,3,0) \text{ e raio } 3.$$

$$P_{\text{circunferência}} = 2\pi \times r = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

O perímetro da interseção da superfície esférica com o plano yOz é igual a 6π .

3. Opção (D)

$h\left(-\frac{1}{2}\right) < h\left(\frac{1}{2}\right)$, logo h não é decrescente no seu domínio.

$D_h =]-1,1[$, $D'_h =]-1,1[$, h é decrescente em $]-1,0[$ e em $]0,1[$ e $h(0)$ não é extremo, logo h não tem extremos.

O gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo Oy , logo h não é par.

4. Opção (C)

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \wedge f\left(\frac{1}{2}x\right) \neq 0 \right\}$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \vee x = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \vee \frac{1}{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 8$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 4 \vee x = -2) \wedge (x \neq -4 \wedge x \neq 8)\} = \{-2\} \cup [4,8[\cup]8, +\infty[$$

5. Opção (A)

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f segundo as seguintes transformações sucessivas:

- translação horizontal associada ao vetor $(-2, 0)$;
- simetria em relação ao eixo Ox ;
- translação vertical associada ao vetor $(0, -1)$.

6.

6.1. $D(\dots, 0)$

$$0 = x + 6 \Leftrightarrow x = -6$$

$$D(-6, 0)$$

$$C(-1, \dots)$$

$$y = -1 + 6 \Leftrightarrow y = 5$$

$$C(-1, 5)$$

$$P(x, x + 6), \quad -6 < x < -1$$

$$\begin{aligned} A_{[ABCP]} &= \frac{\overline{AP} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \\ &= \frac{x+6+5}{2} \times (-x-1) = \\ &= \frac{x+11}{2} \times (-x-1) = \\ &= \frac{1}{2} \times (-x^2 - x - 11x - 11) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2}, \quad -6 < x < -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.2. A(x) > 8 \wedge -6 < x < -1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{11}{2} > 8 \wedge -6 < x < -1 \\
 &\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 11 > 16 \wedge -6 < x < -1 \\
 &\Leftrightarrow -x^2 - 12x - 27 > 0 \wedge -6 < x < -1
 \end{aligned}$$

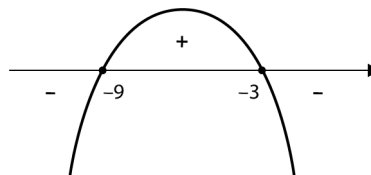
Cálculos auxiliares

$$-x^2 - 12x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times (-1) \times (-27)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \vee x = -3$$



$$\begin{aligned}
 -x^2 - 12x - 27 > 0 \wedge -6 < x < -1 &\Leftrightarrow -9 < x < -3 \wedge -6 < x < -1 \\
 &\Leftrightarrow -6 < x < -3
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =]-6, -3[$$

7. Opção (B)

- Para $x \in [-5, -2[$:

$$f(x) = a(x + 3)^2 + 4$$

Como $f(-4) = 2$, então:

$$a(-4 + 3)^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$$

- Para $x \in]-2, 2]$:

$$f(x) = mx + b$$

$$m = \frac{6 - 3}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$f(x) = x + b$$

Como $f(-1) = 3$, então:

$$3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$$

$$f(x) = x + 4$$

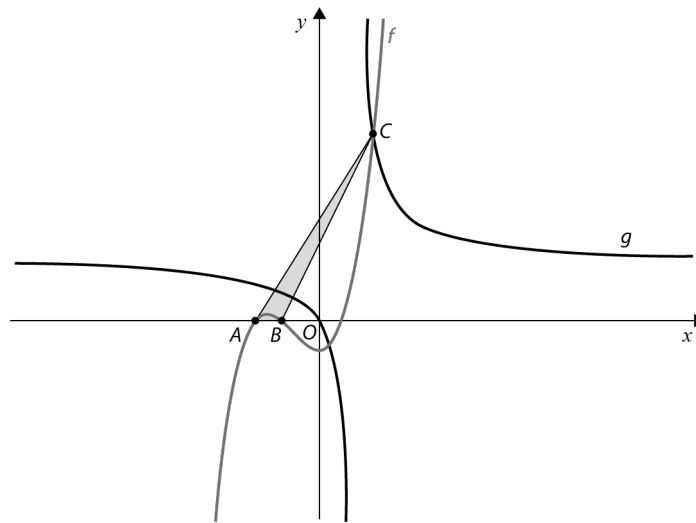
- Para $x \in [2, 4[$: $f(x) = 6$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x + 3)^2 + 4 & \text{se } -5 \leq x < 2 \\ x + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 & \text{se } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

8. Representemos graficamente, com recurso à calculadora gráfica, as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{-2x}{1-x}$$



$$A(-1,62; 0) \quad B(-1; 0) \quad C(1,46; 6,36)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \text{ordenada de } C}{2} = \frac{0,62 \times 6,36}{2} \approx 1,97 \text{ u.a.}$$