Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \dots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. O Telmo é um atleta que já ganhou muitas medalhas em competições de judo.

1.1. No seu quarto tem cinco medalhas de ouro, oito medalhas de prata e quatro medalhas de bronze, todas diferentes entre si.

De quantas formas diferentes é possível colocar estas medalhas em fila, ficando todas as medalhas do mesmo tipo de metal juntas?

(A) 3 063 060 **(B)** 116 121 600 **(C)** 348 364 800 **(D)** 696 729 600

1.2. Nas competições em que o Telmo participa, é atribuído a cada atleta um número natural de seis algarismos, gerado aleatoriamente.

Desses, o Telmo prefere os números que têm exatamente dois algarismos iguais a zero, pois considera que esses números lhe dão sorte.

Qual é a probabilidade de, na próxima competição, lhe ser atribuído um dos seus números preferidos? Apresente o resultado na forma de percentagem.

2. Considere uma escola onde são ministrados dois cursos, Cinema e Fotografia, e onde os alunos estão inscritos em apenas um desses cursos.

2.1. Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- três em cada cinco alunos são raparigas;
- 25% das raparigas estudam Cinema;
- 10% dos alunos não são raparigas nem estudam Cinema.

Escolhendo, ao acaso, um aluno que frequenta o curso de Fotografia, determine a probabilidade de este ser uma rapariga. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Uma das turmas dessa escola tem vinte alunos, numerados de 1 a 20. Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, vinte cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 20.

Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso.

Qual é a probabilidade de, no máximo, saírem dois cartões com números primos? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

3. Para certos valores reais a e b, é contínua no ponto 0 a função f definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{se} \quad x < 0 \\ a & \text{se} \quad x = 0 \\ b + \frac{1}{3x} - \frac{\cos^2 x}{3x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Quais são esses valores?

(A) $a = 1$ e $b = 2$ **(B)** $a = 2$ e $b = 1$ **(C)** $a = 1$ e $b = 1$ **(D)** $a = 2$ e $b = 2$

4. Diversos modelos têm sido propostos, pela comunidade pediátrica, para determinar a dose apropriada para uma criança de um determinado medicamento, comparativamente à dose desse mesmo medicamento indicada para um adulto.

Um dos modelos utilizados para calcular a quantidade C, em miligramas, apropriada para a criança, é dado por:

$$C = \frac{SA}{1{,}7}$$

onde S é a área da superfície corporal da criança, em metros quadrados, e A é a quantidade, em miligramas, recomendada para um adulto.

Sabe-se ainda que a área da superfície corporal de uma criança, S, pode ser determinada por:

$$S = 0{,}007184\, p^{0{,}425} \times h^{0{,}725}$$

onde p é o peso, em quilogramas, e h é a altura, em centímetros, da criança.

Sabendo que existe uma dose de medicamento apropriada para uma criança com 120 cm de altura, que é metade da dose recomendada para um adulto, determine, recorrendo à calculadora gráfica, qual deverá ser o peso dessa criança nestas condições.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

5. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \cos(2x) + \sin(3x) \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

Seja a um número real e considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{2}$;
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a.

Mostre que existe pelo menos um $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para o qual as retas r e s são perpendiculares.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**3.**	**4.**	**5.**	
8	16	16	16	8	20	16	**100**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$ tal que:

- $f(a)$ é um extremo relativo de f;
- $\forall x \in [0, a], -5 < f''(x) < -1$.

O teorema de Lagrange, aplicado à função f' em $[0, a]$, permite concluir que:

(A) $0 < f'(0) < 4a$ **(B)** $a < f'(0) < 5a$ **(C)** $2a < f'(0) < 6a$ **(D)** $3a < f'(0) < 7a$

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 2x} - x & \text{se} \quad x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq 0 \\ \frac{4x^2+3x+\frac{1}{2}}{-2x-1} & \text{se} \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

7.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f não tem zeros. **(B)** A função f tem um único zero.

(C) A função f tem exatamente dois zeros. **(D)** A função f tem exatamente três zeros.

7.2. Sejam $m, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \to -\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$. Determine os valores de m e de b e interprete os valores obtidos em termos de assíntotas ao gráfico de f.

7.3. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'\left(-\frac{1}{4}\right)$.

8. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = 2\text{sen}\, x + \cos^2 x$. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f que tem declive mínimo. Determine as coordenadas do ponto de tangência da reta r com o gráfico de f.

9. Seja $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f é ímpar;
- a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$;
- $x \times f'(x) - f(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função g definida por $\frac{f(x)}{x}$.

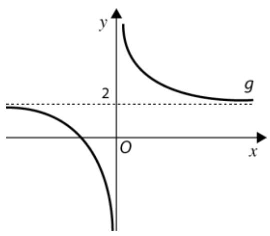


Gráfico I

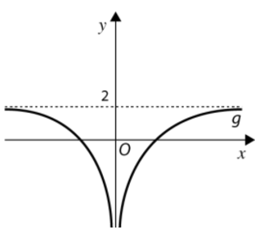


Gráfico II

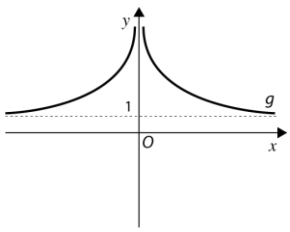


Gráfico III

Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação gráfica não pode ser a representação gráfica da função g.

10. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7$.

Considere as seguintes proposições p e q:

p: "f é contínua em $x = 2$."

q: "$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{f(x)-f(2)} = \dfrac{1}{7}$."

Em relação ao valor lógico das proposições, podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras.

(B) são ambas falsas.

(C) apenas p é verdadeira.

(D) apenas q é verdadeira.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**8.**	**9.**	**10.**	
8	8	20	20	20	16	8	**100**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

$$5! \times 8! \times 4! \times 3! = 696\,729\,600$$

1.2.

- Número de casos possíveis

  Corresponde ao número de números naturais com seis algarismos (note-se que o algarismo 0 não pode aparecer na primeira posição):

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^5$$

- Número de casos favoráveis

  Corresponde ao número de números naturais com seis algarismos que têm exatamente dois algarismos iguais a zero:

  $9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 9 \times 9 \times {}^5C_2$ (observe-se que ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher as duas posições, de entre as cinco disponíveis, para colocar os dois algarismos 0).

A probabilidade pedida é igual a $\frac{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times {}^5C_2}{9 \times 10^5} = \frac{65\,610}{900\,000} = \frac{729}{10\,000}$, que corresponde a $7,29\%$.

2. Consideremos os acontecimentos:

R: "O aluno é do sexo feminino."

C: "O aluno estuda Cinema."

Pelo enunciado, sabe-se que:

$P(R) = \frac{3}{5} = 0,6$

$P(C|R) = 0,25$

$P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0,10$

	C	$\overline{C}$	**Total**
R			0,6
$\overline{R}$	0,30	0,10	0,4
Total			1

2.1. Pretende-se saber o valor de $P(R|\overline{C})$:

$$P(C|R) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = 0,25$$

$$\Leftrightarrow P(C \cap R) = 0,6 \times 0,25$$

$$\Leftrightarrow P(C \cap R) = 0,15$$

	C	$\overline{C}$	**Total**
R	0,15	0,45	0,6
$\overline{R}$	0,30	0,10	0,4
Total	0,45	0,55	1

$$P(R|\overline{C}) = \frac{P(R \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \Leftrightarrow P(R|\overline{C}) = \frac{0,45}{0,55} \Leftrightarrow P(R|\overline{C}) = \frac{9}{11}$$

2.2.

- Número de casos possíveis

  Corresponde ao número de maneiras de retirar quatro cartões do saco onde estão vinte cartões, simultaneamente e ao acaso: ${}^{20}C_4$

- Número de casos favoráveis

  Corresponde ao número de maneiras de retirar, no máximo, dois cartões com números primos. Existem oito números primos até vinte: $\mathbf{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}$ **e** $\mathbf{19}$

  ✓ ${}^{12}C_4$ é o número de maneiras de retirar zero números primos, isto é, quatro dos doze números que não são primos;.

  ✓ ${}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1$ é o número de maneiras de retirar um número primo e três números que não são primos.

  ✓ ${}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2$ é o número de maneiras de retirar dois números primos e dois números que não são primos.

  ${}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2$ é, então, o número de casos favoráveis ao acontecimento em causa.

  A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2}{{}^{20}C_4} = \frac{4103}{4845} \approx \mathbf{0{,}85}$.

3. Opção (D)

Para f ser contínua em $x = 0$, tem que se verificar $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $f(0) = a$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\right) =$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} =$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(1+\sqrt{1-x}\right) =$$

$$= 1 + \sqrt{1-0} = 2$$

Como tem que se verificar $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, vem que $a = 2$.

E como também tem que se verificar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, vem que:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(b + \frac{1}{3x} - \frac{\cos^2 x}{3x}\right) = a$$

ou seja:

$\lim_{x\to 0^+}\left(b + \frac{1-\cos^2 x}{3x}\right) = 2 \Leftrightarrow b + \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\text{sen}^2 x}{3x}\right) = 2 \Leftrightarrow b + \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to 0^+}\text{sen}x = 2$

$\Leftrightarrow b + \frac{1}{3} \times 1 \times \text{sen}0 = 2$

$\Leftrightarrow b + 0 = 2$

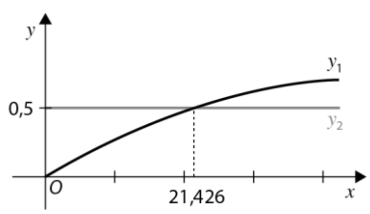
$\Leftrightarrow b = 2$

Assim, para f ser contínua em $x = 0$, tem que $a = 2$ e $b = 2$.

4. Nestas condições, tem-se que $h = 120$, logo $S = 0{,}007184p^{0{,}425} \times 120^{0{,}725}$ e $C = \frac{SA}{1{,}7}$.

Pretende-se saber qual o valor de p tal que $C = \frac{A}{2}$, isto é, $\frac{0{,}007184p^{0{,}425} \times 120^{0{,}725} \times A}{1{,}7} = \frac{A}{2}$, ou seja, $0{,}1359326569\, p^{0{,}425} = \frac{1}{2}$.

Usando a calculadora gráfica:



$y_1 = 0{,}1359326569x^{0{,}425}$

$y_2 = 0{,}5$

O peso da criança, nestas condições, deve ser, aproximadamente, 21 kg.

5. $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ e $g(x) = x^2$

$f'(x) = -2\text{sen}(2x) + 3\cos(3x)$ e $g'(x) = 2x$

Sejam m_r e m_s os declives, respetivamente, das retas r e s.

$m_r = f'\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -2\text{sen}\left(2\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= -2\text{sen}(2a + \pi) + 3\cos\left(3a + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 2\text{sen}(2a) + 3\text{sen}(3a)$

$m_s = g'(a) = 2a$

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 2x(2\text{sen}(2x) + 3\text{sen}(3x))$.

1) h é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < -1 < h(0)$

$h(0) = 0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2}\left(2\text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\left(2\text{sen}(\pi) + 3\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \pi(0-3) = -3\pi$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: h(a) = -1$$

isto é:

$$\exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: 2a\big(2\text{sen}(2a) + 3\text{sen}(3a)\big) = -1$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: m_s \times m_r = -1$$

Assim, mostramos que existe pelo menos um $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ para o qual as retas r e s são perpendiculares.

<u>Caderno 2</u>

6. Opção (B)

Sabemos que a função f, de domínio $\mathbb{R}$, é duas vezes diferenciável.

a é um ponto interior do domínio de f e $f'(a)$ existe e é finita, logo, se $f(a)$ é um extremo relativo de f, então $f'(a) = 0$.

f' é contínua em $[0, a]$ e é diferenciável em $]0, a[$, logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que existe $c \in]0, a[$ tal que $f''(c) = \frac{f'(a)-f'(0)}{a-0}$, isto é,$f''(c) = \frac{0-f'(0)}{a}$, ou seja, $f''(c) = -\frac{f'(0)}{a}$.

Como $\forall x \in [0, a], -5 < f''(x) < -1$, então:

$$-5 < -\frac{f'(0)}{a} < -1$$

$$-5a < -f'(0) < -a$$

$$a < f'(0) < 5a$$

7.

7.1. Opção (D)

Em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, +\infty[$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x} = x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2 + 2x}\right)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x = x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = -\frac{2}{3}$$

0 e $-\frac{2}{3}$ são zeros de f.

Em $\left]-\frac{1}{2},0\right[$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+3x+\frac{1}{2}}{-2x-1}=0 \Leftrightarrow 4x^2+3x+\frac{1}{2}=0 \ \wedge\ -2x-1\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+6x+1=0 \ \wedge\ x\neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\times 8}}{16}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm 2}{16}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4} \ \vee\ \underbrace{x=-\frac{1}{2}}_{\notin\left]-\frac{1}{2},0\right[}$$

$-\frac{1}{4}$ é zero de f.

Logo, a função f tem exatamente três zeros.

7.2. $y=mx+b, m,b\in\mathbb{R}$

$x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)}}{x}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{x}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{x}-1=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}}\right)-1=-\sqrt{4+0}-1=$$

$$=-2-1=-3$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+3x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-x+3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2}=\frac{2}{-\sqrt{4+0}-2}=$$

$$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y=-3x-\frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

7.3. $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{\frac{4x^2+3x+\frac{1}{2}}{-2x-1}}{x+\frac{1}{4}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{(4x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(-2x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{4x+2}{-2x-1} =$

$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} =$

$= -2$

Cálculos auxiliares

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4\times\frac{1}{16}+3\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}}{-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1} =$

$= \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} =$

$= 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & & -1 & -\frac{1}{2} \\ \hline & 4 & 2 & 0 = R \end{array}$$

8. $D_f = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$f(x) = 2\text{sen}x + \cos^2 x$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos x(-\text{sen}x) = 2\cos x - \text{sen}(2x)$

$f''(x) = -2\text{sen}x - 2\cos(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\text{sen}x - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow -\text{sen}x = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \text{sen}(-x) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \text{sen}(-x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad -x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
Sinal de f''	–	–	0	–	0	+	+
Variação de f'	Máx. $f'(0)$	↘		↘	mín. $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	↗	Máx. $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Cálculos auxiliares

$f''(0) = -2\text{sen}(0) - 2\cos(0) = -2$

$f''(\pi) = -2\text{sen}(\pi) - 2\cos(2\pi) = 0 - 2 = -2$

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos(3\pi) = 2 + 2 = 4$

$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ é o declive da reta r.

Assim, $\left(\frac{7\pi}{6}, f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$ são as coordenadas do ponto de tangência da reta r com o gráfico de f.

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

9. $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} \underbrace{=}_{\text{pois } f \text{ é ímpar}} \frac{-f(x)}{-x} =$

$= \frac{f(x)}{x} =$

$= g(x)$

Logo, g é par, o que exclui a representação gráfica apresentada no gráfico I.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, pois a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Logo, exclui-se a representação gráfica apresentada no gráfico III, onde $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$.

$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \times x - f(x) \times 1}{x^2} = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \times f'(x) - f(x) < 0$ (pelas condições do enunciado), então $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) < 0$, ou seja, g é decrescente em $]0, +\infty[$, o que exclui a representação gráfica apresentada no gráfico II.

10. Opção (C)

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7 \Leftrightarrow f'(2) = 7$

Como $f'(2)$ existe e é finita, f é contínua em $x = 2$, logo, a proposição p é verdadeira.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{4-x^2}{f(x)-f(2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-(x-2)(x+2)}{f(x)-f(2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times \lim\limits_{x \to 2}[-(x+2)] = \frac{1}{f'(2)} \times (-4) = -\frac{4}{7}$, logo, a proposição q é falsa.