



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____

Data: ___ / ___ / ___

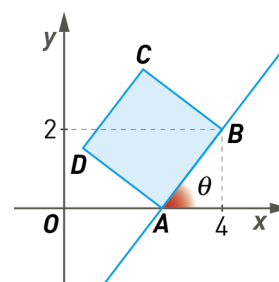
-
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
 - A prova inclui um formulário.
 - As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.
-

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- a área do quadrado $[ABCD]$ é $6,25$;
- θ é a inclinação da reta AB ;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e B tem coordenadas $(4, 2)$.



1.1. A amplitude, em graus, arredondada às centésimas do ângulo θ é:

- (A) 53,13 (B) 36,87 (C) 38,66 (D) 51,27

1.2. Mostra que uma equação da reta AB é $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$.

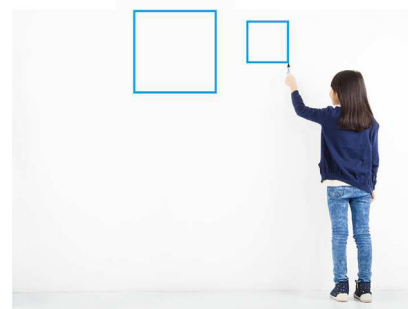
1.3. Atendendo ao resultado apresentado em 1.2., determina as coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o eixo Oy .

2. A Marta construiu uma sequência de 8 quadrados em que as medidas dos lados são os oito primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $\frac{1}{2}$.

Sabe-se que a área do primeiro quadrado da sequência é 1024.

2.1. A área do último quadrado da sequência é:

- (A) 8 (B) 0,25
(C) 0,0625 (D) 4



2.2. Mostra que o termo geral de (u_n) é $u_n = 2^{6-n}$ e calcula a soma dos 12 primeiros termos da sucessão. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

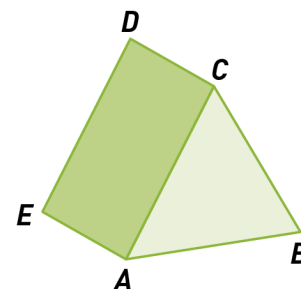
3. Considera a sucessão (u_n) em que o termo geral é $u_n = \frac{1-3n}{n+1}$.

Determina o número de termos da sucessão que não pertencem a $V_{0,0015}(-3)$ (vizinhança de -3 e raio $0,0015$).

4. Na figura está representado um prisma triangular regular.

Em relação ao referencial o.n. $Oxyz$, sabe-se que:

- a base $[ABC]$ está contida no plano α definido pela equação:
 $4x + 2y - \sqrt{10}z - 8 = 0$;
- os vértices A e B são as interseções do plano α , respetivamente, com o eixo Ox e o eixo Oy ;
- o vértice D tem coordenadas $(-1, 1, 2\sqrt{10})$.



Determina o volume do prisma.

Na tua resolução deves apresentar as seguintes etapas, com a determinação do valor:

- exato da área da base do prisma;
- exato da altura do prisma;
- arredondado às centésimas do volume do prisma.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera:

- a superfície esférica, de centro C e raio r , definida por: $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$
- a reta s definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-3, -4, 0) + k(1, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

5.1. Verifica se o ponto C , centro da superfície esférica, pertence à reta s .

5.2. A superfície esférica intersesta o eixo Oz num ponto A de cota positiva.

Seja α o plano que passa em A e é perpendicular à reta s .

Determina, na forma reduzida, uma equação do plano α .

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética em que o sétimo termo é do dobro do quinto e a soma destes dois termos é 8.

Determina o termo geral da sucessão (u_n) .

7. Seja (u_n) uma sucessão real de termos negativos tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Podes concluir que:

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica.

(B) A sucessão (u_n) é limitada.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

(D) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

8. A sucessão (u_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 5 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calcula, caso exista, $\lim\left(\frac{1}{n^2} \times S_n\right)$, sendo S_n a soma dos n primeiros termos da sucessão (u_n) .

9. Considera as sucessões (v_n) e (w_n) tais que:

$$v_n = \frac{2}{n+5} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{5^{n+1} - 3^n}{1+5^n}$$

9.1. Calcula, caso exista, $\lim(w_n)$.

9.2. Se $t_n = \begin{cases} w_n & \text{se } n \leq 50 \\ v_n & \text{se } n > 50 \end{cases}$, então o $\lim(t_n)$ é:

- (A) 50 (B) $+\infty$ (C) 0 (D) $-\infty$

10. Seja k um número real e (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = k \\ u_{n+1} = -k + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

10.1. Mostra, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k$.

10.2. Sabe-se que $\sum_{i=26}^{85} u_i = 180$. Determina o valor de k .

FIM (Caderno 2)

Cotações											
Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.				Total
Pontos	10	10	10	10	10	10	20				80
Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	5.1.	5.2.	6.	7.	8.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.		
Pontos	16	16	18	10	15	15	10	12	8	Total	120
Total											200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
 r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)



CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

1.1. $\overline{AB}^2 = 6,25$, ou seja, $\overline{AB} = \sqrt{6,25} = 2,5$.

Como $\sin \theta = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}$ e $0 < \theta < 90^\circ$, conclui-se que $\theta \approx 53,13^\circ$.

Resposta: OPÇÃO (A) 53,13

1.2. Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta AB e P o ponto $(4, 0)$.

Sabe-se que o triângulo $[APB]$ é retângulo.

$$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 + 2^2 = 6,25 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 2,25. \text{ Então, } \overline{AP} = 1,5.$$

$$m = \tan \theta = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Como $B \in AB$, tem-se $2 = \frac{4}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\frac{10}{3}$.

Então, a equação reduzida da reta AB é $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$, como se pretendia provar.

1.3. Tem-se $BC \perp AB$. Seja $y = m_{BC}x + b_{BC}$ a equação reduzida da reta BC .

$$m_{BC} = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{4}$$

Como $B \in BC$ tem-se: $2 = -\frac{3}{4} \times 4 + b_{BC} \Leftrightarrow b_{BC} = 5$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Resposta: O ponto de interseção da reta BC com o eixo Oy é $(0,5)$.

2.

2.1. Seja u_1 a medida do lado do primeiro quadrado.

Como $u_1^2 = 1024$, tem-se $u_1 = 32$.

A expressão geral das medidas dos lados é $u_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$u_8 = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,25$$

Resposta: OPÇÃO (B) 0,25

2.2. A expressão geral das medidas dos lados é $u_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$u_n = 2^5 \times \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = 2^{5-n+1} \Leftrightarrow u_n = 2^{6-n}$$

$$S_{12} = 32 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right] \approx 63,98$$

A soma dos 12 primeiros termos da sucessão é, aproximadamente, 63,98.

3. Vejamos a partir de que ordem os termos pertencem a $V_{0,0015}(-3)$.

$$|u_n + 3| < 0,0015 \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n}{n+1} + 3 \right| < 0,0015 \Leftrightarrow \left| \frac{1-3n+3n+3}{n+1} \right| < \frac{15}{10000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \frac{15}{10000} \Leftrightarrow 40000 < 15n+15 \quad ; \quad n > 2665,67$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n \geq 2666$.

Resposta: Há 2665 termos que não pertencem a $V_{0,0015}(-3)$.

4. Área da base do prisma:

Seja $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$.

Como A e B pertencem a α , tem-se:

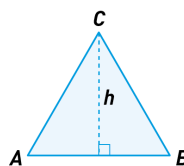
$$4a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \quad . \quad \text{Então, } A(2, 0, 0).$$

$$2b - 8 = 0 \Leftrightarrow b = 4 \quad . \quad \text{Então, } B(0, 4, 0).$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

Seja h a altura do triângulo $[ABC]$.

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = \sqrt{20}^2 \Leftrightarrow h^2 = 15 \quad . \quad \text{Então, } h = \sqrt{15} \quad .$$



$$A_{base} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{15}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

A área da base do prisma é $5\sqrt{3}$.

- **Altura do prisma:**

A reta DC pode ser definida, vetorialmente, por $(x, y, z) = (-1, 1, 2\sqrt{10}) + k(4, 2, -\sqrt{10})$, $k \in \mathbb{R}$.

Como $C \in DC$, o ponto C é do tipo $(x, y, z) = (-1 + 4k, 1 + 2k, 2\sqrt{10} - \sqrt{10}k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $C \in \alpha$. Tem-se:

$$4(-1 + 4k) + 2(1 + 2k) - \sqrt{10}(2\sqrt{10} - \sqrt{10}k) - 8 = 0 \Leftrightarrow -4 + 16k + 2 + 4k - 20 + 10k - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30k = 30 \Leftrightarrow k = 1$$

O ponto C tem coordenadas $(x, y, z) = (3, 3, \sqrt{10})$.

$$\overline{CD} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + \sqrt{10}^2} = \sqrt{30}$$

A altura do prisma é $\sqrt{30}$.

- **Volume do prisma:**

$$V = 5\sqrt{3} \times \sqrt{30} \approx 47,43$$

Resposta: O volume do prisma é, aproximadamente, 47,43.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	80

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5.

5.1. O ponto C tem coordenadas $(-1, 0, 2)$.

Vejamos se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(-1, 0, 2) = (-3, -4, 0) + k(1, 2, 1)$.

$$\begin{cases} -1 = -3 + k \\ 0 = -4 + 2k \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ 2 = k \\ 2 = k \end{cases} . \text{ Conclui-se que } C \in s .$$

Resposta: O ponto C pertence à reta s .

5.2. Seja $A(0, 0, a)$.

Como A pertence à superfície esférica de equação $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$, tem-se:

$$1 + 0 + (z-2)^2 = 10 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 9 \Leftrightarrow z-2 = 3 \vee z-2 = -3 \Leftrightarrow z = 5 \vee z = -1 .$$

Como A tem cota positiva, $A(0, 0, 5)$.

Como $s \perp \alpha$, um vetor diretor de s é normal a α . Assim, uma equação representativa de α pode ser: $x + 2y + z + d = 0$. Como $A \in \alpha$, tem-se $5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$.

Resposta: Uma equação do plano α é $x + 2y + z - 5 = 0$.

6.

$$\begin{cases} u_7 = 2u_5 \\ u_7 + u_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_7 = 2u_5 \\ 2u_5 + u_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_7 = \frac{16}{3} \\ u_5 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$u_7 = u_5 + 2r \Leftrightarrow \frac{16}{3} = \frac{8}{3} + 2r \Leftrightarrow r = \frac{4}{3} . \text{ Então, } u_n = u_5 + (n-5)r \Leftrightarrow u_n = \frac{8}{3} + (n-5) \times \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}n - \frac{20}{3} \Leftrightarrow u_n = \frac{4}{3}n - 4$$

Resposta: O termo geral da sucessão é $u_n = \frac{4}{3}n - 4$.

7. Como $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$, tem-se $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, conclui-se que (u_n) é monótona decrescente.

Resposta: **OPÇÃO (D)** A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

8. Trata-se de uma progressão aritmética de razão 5 pois, $u_{n+1} - u_n = 5, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = -2 + (n-1) \times 5 \Leftrightarrow u_n = 5n - 7$$

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{-2 + 5n - 7}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{5n - 9}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{5n^2 - 9n}{2}$$

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} \times S_n \right) = \lim \left(\frac{5n^2 - 9n}{2n^2} \right) \stackrel{\infty}{=} \lim \left(\frac{n^2 \left(5 - \frac{9}{n} \right)}{2n^2} \right) = \lim \left(\frac{5 - \frac{9}{n}}{2} \right) = \frac{5 - 0}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: $\lim \left(\frac{1}{n^2} \times S_n \right) = \frac{5}{2}$

9.

$$9.1. \lim(w_n) = \lim \frac{5^{n+1} - 3^n}{1 + 5^n} = \lim \frac{5^n \left(5 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right)}{5^n \left(\frac{1}{5^n} + 1 \right)} = \lim \frac{5 - \left(\frac{3}{5} \right)^n}{\frac{1}{5^n} + 1} = \frac{5 - 0}{0 + 1} = 5$$

Resposta: $\lim(w_n) = 5$

9.2. Como (t_n) e (v_n) diferem por um número finito de termos (50 termos),

$$\lim t_n = \lim v_n = \lim \frac{2}{n+5} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

Resposta: OPÇÃO (C) $\lim t_n = 0$

10.

10.1. Para $n = 1$ tem-se $u_1 = k$, o que se verifica.

Hipótese: $u_p = k$

Tese: $u_{p+1} = k$

Demonstração: $u_{p+1} = -k + 2u_p$. Por hipótese, $u_p = k$, logo $u_{p+1} = -k + 2k = k$.

A propriedade é válida para $n = 1$ e é hereditária, logo $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k$.

$$10.2. \sum_{i=26}^{85} u_i = 180 \Leftrightarrow u_{26} + u_{27} + \dots + u_{85} = 180 \Leftrightarrow \underbrace{k + k + \dots + k}_{60 \text{ parcelas}} = 180 \Leftrightarrow 60k = 180 \Leftrightarrow k = 3$$

FIM (Caderno 2)

Cotações											
Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.	Total			
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	80			
Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	5.1.	5.2.	6.	7.	8.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	Total	
Pontos	16	16	18	10	15	15	10	12	8	120	
Total										200	