Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\cos b + \operatorname{sen} b\,.\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \,(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

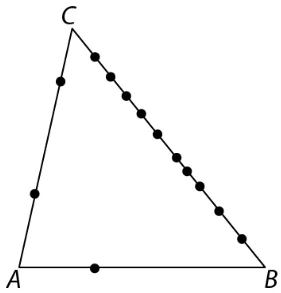
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \;(p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 35 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Num triângulo [*ABC*] assinalaram-se treze pontos: um ponto em [*AB*], dois pontos em [*AC*] e dez pontos em [*BC*], como indicado na figura.



Quantos triângulos diferentes se podem construir com estes treze pontos?

(A) 286 **(B)** 285 **(C)** 166 **(D)** 120

2. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em quatro naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há 13 cartas: um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

2.1. Utilizando apenas o naipe de ouros, quantas sequências de 13 cartas, com as figuras todas juntas, é possível construir?

2.2. Retirando ao acaso, simultaneamente, cinco cartas de um baralho completo, de quantas maneiras é possível obter pelo menos duas figuras?

2.3. Retirando ao acaso, simultaneamente, seis cartas de um baralho completo, de quantas maneiras é possível obter exatamente dois ases e exatamente quatro cartas de copas?

3. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 1 788 231. Quantos desses números são pares?

(A) 540 **(B)** 900 **(C)** 1440 **(D)** 2160

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item					
Cotação (em pontos)					
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	
8	15	15	20	8	**66**

CADERNO 2: 55 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

4. Para qualquer universo U não vazio e quaisquer subconjuntos A e B de U, $\overline{A \cap (\bar{A} \cup B)}$ é igual a:

(A) $A \cap B$ **(B)** $\overline{A \cap B}$ **(C)** $\bar{A} \cap \bar{B}$ **(D)** $A \cap \bar{B}$

5. A sala da Isaura tem seis candeeiros distintos, com um interruptor independente para cada um deles.

De quantas formas diferentes pode a Isaura iluminar a sua sala?

(A) 6^2 **(B)** $6^2 - 1$ **(C)** 2^6 **(D)** $2^6 - 1$

6. A turma dos gémeos, Pedro e Simão, tem um total de 24 alunos: 10 rapazes (incluindo os gémeos) e 14 raparigas.

Redija, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo combinatório, inventado por si, que admita como resposta correta $2 \times {}^{8}C_2 \times {}^{14}C_3 + {}^{8}C_1 \times {}^{14}C_3$.

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número de alunos da turma;
- o número de rapazes e de raparigas;
- o processo cujo número de maneiras pretende que seja calculado (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

7. Determine o valor natural $n \geq 5$ que verifica a igualdade:

$${}^{n}A_4 = {}^{n}C_5 \times {}^{2}A'_3$$

8. A organização de um festival de cinema pretende exibir um filme por dia durante o tempo de duração do festival. Para tal, possui m filmes de ação todos diferentes e n filmes de outras categorias que não de ação e também todos diferentes entre si.

Se pretender exibir todos os filmes, sendo que os filmes de ação devem ser exibidos em dias consecutivos, quantas formas diferentes existem de o fazer?

(A) $m! \times n!$ **(B)** $m! \times (n+1)!$ **(C)** $m! \times n! \times (n+1)!$ **(D)** $(m+n)!$

9. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma do primeiro, do segundo, do penúltimo e do último elementos é 2018.

9.1. Qual é o quinto elemento dessa linha?

9.2. Qual é o maior elemento dessa linha?

Apresente os elementos pedidos na forma ${}^{n}C_p$.

10. Considere o desenvolvimento de $\left(x\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{10}$, com $x>0$.

10.1. Considere as proposições p e q relativas ao desenvolvimento do binómio apresentado:

p: "O desenvolvimento do binómio tem 10 termos."

q: "A soma dos coeficientes binomiais é 2^{10}."

Indique, justificando, o valor lógico das proposições p e q.

10.2. O termo independente de x no desenvolvimento do binómio apresentado é da forma ${}^{n}C_{p}a^{p}$, onde $n,p \in \mathbb{N}\ e\ a \in \mathbb{Z}$.

Sem efetuar o desenvolvimento, determine os valores de $n, p\ e\ a$.

11. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(A)<1$.

Prove que:

$$\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{1-P(A)}\times P(\bar{A})+P(B)-P\left(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\right)=P(\bar{A})$$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item										
Cotação (em pontos)										
4.	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	
8	8	20	18	8	12	12	12	16	20	**134**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (C)

$^{13}C_3 \ - {}^{10}C_3 \ = 166$

2.

2.1. 3! × 10! × 11 = 239 500 800

3! é o número de maneiras diferentes de as três figuras de ouros permutarem entre si.

10! é o número de maneiras diferentes de as dez cartas de ouros que não são figuras permutarem entre si.

11 é o número de maneiras diferentes de selecionar as três posições consecutivas onde poderão ficar as três figuras.

2.2. $^{52}C_5 \ - {}^{40}C_5 \ - 12 \times {}^{40}C_4 \ = 844\,272$

$^{52}C_5$ é o número de maneiras de retirar, simultaneamente, cinco cartas quaisquer de entre as 52.

$^{40}C_5$ é o número de maneiras de retirar, simultaneamente, cinco cartas que não são figuras.

$12 \times {}^{40}C_4$ é o número de maneiras de retirar, simultaneamente, cinco cartas, das quais apenas uma é figura.

Logo, se a todas as possibilidades retirarmos o número de casos em que não saem figuras e o número de casos em que sai apenas uma figura, obtemos o número de maneiras de obter pelo menos duas figuras.

2.3. $1 \times 3 \times {}^{12}C_3 \ \times 36 + {}^{3}C_2 \ \times {}^{12}C_4 \ = 25\,245$

Existem duas hipóteses em alternativa:

- ou sai um ás de copas, um ás que não é de copas, três copas que não são ases e uma carta que nem é copa nem ás;
- ou saem dois ases que não são copas e quatro cartas que são copas mas não são ases.

No primeiro caso existem $1 \times 3 \times {}^{12}C_3 \ \times 36$ maneiras distintas e no segundo caso existem ${}^{3}C_2 \ \times {}^{12}C_4$ maneiras distintas.

3. Opção (A)

— — — — — — _2_ $\qquad {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! \times 1$

ou: $\qquad +$

— — — — — — _8_ $\qquad 6 \times {}^5C_2 \times 3! = 540$

Existem duas hipóteses em alternativa:

- ou termina em 2 e existem ${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times 2! \times 1$ números nas condições pedidas;
- ou termina em 8 e existem $6 \times {}^5C_2 \times 3!$ números nas condições pedidas.

Caderno 2

4. Opção (B)

$$\overline{A \cap (\bar{A} \cup B)} = \overline{(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)} = \overline{\emptyset \cup (A \cap B)} =$$
$$= \overline{A \cap B}$$

5. Opção (D)

A iluminação da sala pode ser feita ou com 1 ou com 2 ou com 3 ou com 4 ou com 5 ou com 6 candeeiros.

Assim, ${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 = 2^6 - 1$ é o número de maneiras distintas de iluminar a sala.

6. A turma dos gémeos, Pedro e Simão, tem 24 alunos: 10 rapazes (incluindo os gémeos) e 14 raparigas. Pretende-se formar uma comissão constituída por três rapazes e três raparigas da turma. Qual é o número de comissões que se podem formar com pelo menos um dos gémeos?

7. ${}^nA_4 = {}^nC_5 \times {}^2A'_3 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n!}{5! \times (n-5)!} \times 2^3$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{120 \times (n-5)!} \times 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{8} n(n-1)(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$\Leftrightarrow 15n(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)(15-n+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n-1 = 0 \ \vee \ n-2 = 0 \ \vee \ n-3 = 0 \ \vee \ 19-n = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n = 1 \ \vee \ n = 2 \ \vee \ n = 3 \ \vee \ n = 19$$

Como $n \geq 5$, vem que $n = 19$.

8. Opção (B)

$$\boxed{\underbrace{\_\_\_\ \ \_\_\_\ \ \_\_\_\ \cdots\ \_\_\_}_{m \text{ filmes de ação seguidos}}}\quad \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \cdots\ \boxed{}}_{n \text{ filmes de outras categorias}}$$

Existem $m!$ formas de ordenar os m filmes de ação que irão ser exibidos em m dias consecutivos. Por cada uma destas formas, existem $(n+1)!$ maneiras de permutar os n filmes de outras categorias entre si e também com o bloco dos filmes de ação.

9. A soma do primeiro, segundo, penúltimo e último elementos da linha n do triângulo de Pascal pode ser representada por $1+n+n+1$.

Assim:

$2+2n=2018 \Leftrightarrow n=\frac{2016}{2} \Leftrightarrow n=1008$

Linha $n=1008$. Assim:

9.1. O quinto termo é ${}^{1008}C_4$.

9.2. O maior elemento é o elemento central da linha, que é ${}^{1008}C_{504}$.

10.

10.1. $\left(x\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k \times (x\sqrt{x})^{10-k} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^k$

Assim, o desenvolvimento tem 11 termos. A proposição p é falsa.

A soma dos coeficientes binomiais é $\sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 + \cdots + {}^{10}C_{10} = 2^{10}$.

A proposição q é verdadeira.

10.2. ${}^{10}C_p \times (x\sqrt{x})^{10-p} \times \left(-\frac{2}{x}\right)^p = {}^{10}C_p \times x^{10-p} \times (\sqrt{x})^{10-p} \times \frac{(-2)^p}{x^p} =$

$$= {}^{10}C_p \times (-2)^p \times x^{10-p} \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-p} \times x^{-p} =$$

$$= {}^{10}C_p \times (-2)^p \times x^{10-p+5-\frac{1}{2}p-p} =$$

$$= {}^{10}C_p \times (-2)^p \times x^{15-\frac{5}{2}p}$$

Para ser termo independente:

$15-\frac{5}{2}p=0 \Leftrightarrow p=15\times\frac{2}{5} \Leftrightarrow p=6$

Assim, $n=10, p=6$ e $a=-2$.

11. $\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{1-P(A)} \times P(\bar{A}) + P(B) - P\left(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})} \times P(\bar{A}) + P(B) - P(A\cap B) =$

$= P(\bar{A}\cap\bar{B}) + P(B) - P(A\cap B) =$

$= 1 - P(A\cup B) + P(B) - P(A\cap B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$

$= 1 - P(A) =$

$= P\left(\bar{A}\right)$, como queríamos demonstrar.